MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2007/2008 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 4 Aprile 2008

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u>   Dimostrare che ogni numero complesso z di modulo unitario, ad eccezione di $z = -1$, può essere scritto nella forma

$$z = \frac{1 + it}{1 - it} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad |z| = 1,\ z \neq -1$$

[punteggio 5]

Si ponga $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Per $z \neq -1$ e $|z| = 1$ vale l'identità

$$z = \frac{z(\overline{z} + 1)}{\overline{z} + 1} = \frac{1 + z}{1 + \overline{z}} = \frac{1 + x + iy}{1 + x - iy} = \frac{1 + iy/(1 + x)}{1 - iy/(1 + x)}.$$

Posto $t = y/(1 + x)$, al variare di x e y in $\mathbb{R}$ con $x \neq -1$ si ha $t \in \mathbb{R}$ e quindi l'asserto.

Esercizio 2 Dimostrare le seguenti affermazioni, se vere, o fornire un controesempio, se false:

a) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$;

b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

[punteggio 6]

---

a) Falso. Si considerino in $\mathbb{R}$ i due insiemi chiusi $A = [0, 1]$ e $B = [1, 2]$. La parte interna della loro unione è $(A \cup B)^\circ = (0, 2)$. D'altro canto si ha $A^\circ = (0, 1)$ e $B^\circ = (1, 2)$ e quindi $A^\circ \cup B^\circ = (0, 2) \setminus \{1\}$.

b) Vero. Dimostriamo separatamente le due inclusioni $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ e $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$. Poiché $A \cap B \subset A$ segue $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$. Analogamente $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ e pertanto $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. D'altro canto $A^\circ \cap B^\circ$ è un aperto con la proprietà $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. Poiché $(A \cap B)^\circ$ rappresenta l'unione di tutti gli aperti contenuti in $A \cap B$, deve essere $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

Esercizio 3 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+c^n)z^n \quad c\in\mathbb{C} \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}5^n z^{n!}$$

[punteggio 6]

$a)$ Il coefficiente n-esimo della serie assegnata vale $a_n = n + c^n$ e si ha

$$|a_n|^{1/n} = |n+c^n|^{1/n} = \begin{cases} n^{1/n}\,|1+c^n/n|^{1/n} \\ |c|\,|1+n/c^n|^{1/n} \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1 & |c|\le 1 \\ |c| & |c|>1 \end{cases}$$

avendo usato $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Pertanto il raggio di convergenza vale

$$R = \begin{cases} 1 & |c|\le 1 \\ 1/|c| & |c|>1 \end{cases}$$

$b)$ Il coefficiente n-esimo della serie assegnata riscritta nella forma canonica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ vale

$$a_k = \begin{cases} 5^{m_k} & \text{se } k = m_k! \text{ con } m_k \text{ intero} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La formula di Hadamard fornisce

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} |a_k|^{1/k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} 5^{m_k/m_k!} \\ &= \lim_{n\to\infty} 5^{1/(m_{k_n}-1)!} = 5^0 \end{aligned}$$

essendo m_{k_n} il più piccolo intero tale che $m_{k_n}! \ge n$. In conclusione $R = 1$.

Esercizio 4 Si dimostri il seguente teorema. Sia $f : (S, d) \mapsto (\Omega, \rho)$ continua e S compatto, allora f è uniformemente continua.

[punteggio 5]

Fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$ vorremmo trovare $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall x, y \in S$ con $d(x, y) < \delta$ si abbia $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Si supponga che ciò non sia possibile; in particolare la proprietà sia falsa per ogni $\delta = 1/n$. Allora $\forall n \geq 1\ \exists x_n, y_n \in S$ tali che $d(x_n, y_n) < 1/n$ ma $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Poiché S è compatto, è possibile estrarre da (x_n) una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente a un qualche punto $x \in S$. Ma se $\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = x$, allora anche $\lim_{n_k \to \infty} y_{n_k} = x$. Infatti,

$$d(x, y_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) < d(x, x_{n_k}) + 1/n_k \xrightarrow{n_k \to \infty} 0.$$

Poiché f è continua $\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n_k \to \infty} f(y_{n_k}) = f(x)$ e quindi

$$\rho(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \rho(f(x_{n_k}), f(x)) + \rho(f(x), f(y_{n_k})) \xrightarrow{n_k \to \infty} 0$$

in contraddizione con $\rho(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$. $\square$

Esercizio 5 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sinh(z) = i$$

[punteggio 5]

L'equazione da risolvere è

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i$$

cioé

$$(e^z)^2 - 2ie^z - 1 = 0$$

che fornisce

$$e^z = i + \sqrt{i^2 + 1} = i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$z_k = i\pi \frac{4k + 1}{2} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

<u>Esercizio 6</u> Si determini il dominio di analiticità delle seguenti funzioni e, dove opportuno, si calcoli l'espressione della derivata. Nel caso di funzioni polidrome si consideri il ramo principale.

$$a)\ \log((\log z)^2) \qquad b)\ e^{z^2+i} \qquad c)\ \frac{\sqrt{1-z}}{z^2+i}$$

[punteggio 6]

$a)$ Il ramo principale del logaritmo è una funzione analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo origine inclusa. Pertanto la funzione considerata è analitica in $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti $z(t) = -t$ con $t \in [0, \infty)$ e di quelli del tipo

$$(\log z(u))^2 = -u \qquad u \in [0, \infty),$$

ovvero

$$z(u) = e^{\log z(u)} = e^{\pm i\sqrt{u}} \qquad u \in [0, \infty).$$

Pertanto il dominio di analiticità è $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \neq 1,\ z \neq -t,\ t \in [0, \infty)\}$. Per $z \in D$ la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \log((\log z)^2) = \frac{1}{(\log z)^2} 2 \log z \frac{1}{z} = \frac{2}{z \log z}.$$

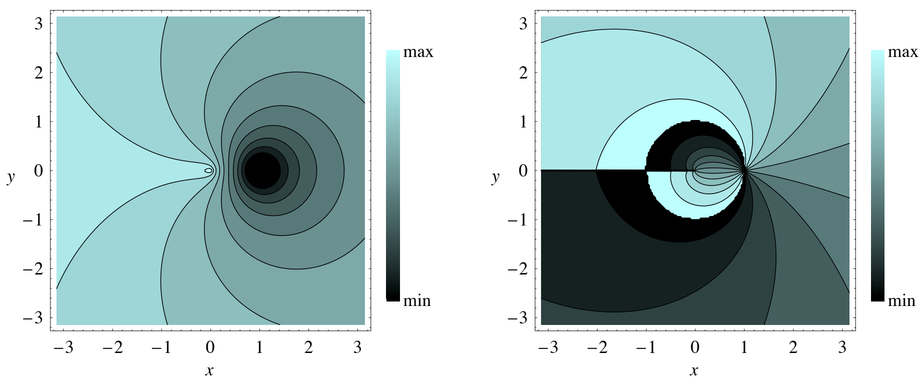

Figure 1: Grafici di livello della parte reale (sinistra) e della parte immaginaria (destra) del ramo principale di $\log((\log z)^2)$ con $z = x + iy$.

$b)$ La funzione è intera in quanto composizione di funzioni intere. La derivata vale

$$\frac{d}{dz} e^{z^2+i} = 2z e^{z^2+i}.$$

c) Il ramo principale della funzione considerata è analitico in $D = \{z \in \mathbb{C}: \ z \neq e^{-i\pi/4}, \ z \neq e^{i3\pi/4}, \ z \neq 1+t, \ t \in [0,\infty)\}$ in quanto

$$\sqrt{1-z} = e^{\frac{1}{2}\log(1-z)}$$

e $z^2 + i = 0$ ha soluzioni $z = e^{-i\pi/4}$ e $z = e^{i3\pi/4}$. In D la derivata vale

$$\frac{d}{dz}\frac{\sqrt{1-z}}{z^2+i} = \frac{-\frac{1}{2}(1-z)^{-1/2}(z^2+i) - (1-z)^{1/2}2z}{(z^2+i)^2} = \frac{-i-4z+3z^2}{2\sqrt{1-z}(z^2+i)^2}.$$

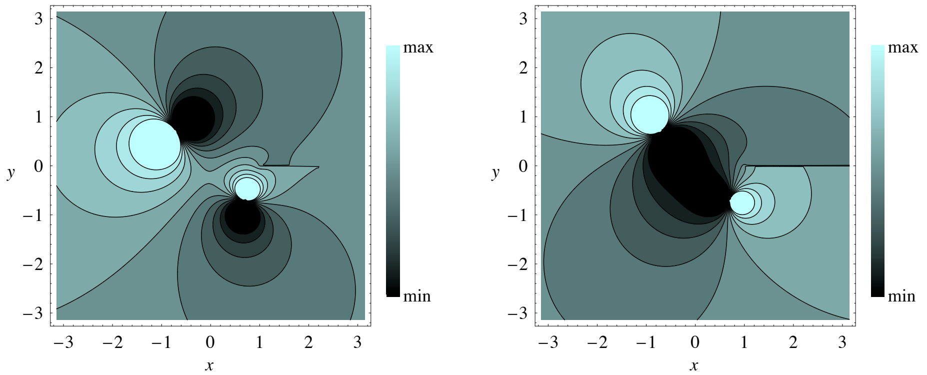

Figure 2: Grafici di livello della parte reale (sinistra) e della parte immaginaria (destra) del ramo principale di $\sqrt{1-z}/(z^2+i)$ con $z = x + iy$.