MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2014/2015 – Prof. C. Presilla

Prova B1 – 8 giugno 2015

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(cx)}{x+c}$$

appartiene a $C_2([0,\infty))$. Per quali valori di c si ha $f \in L_2([0,\infty))$?

[punteggio 5]

Se $c > 0$ il denominatore di $f(x)$ non si annulla mai pertanto la funzione è continua e quindi essa appartiene a $C_2([0,\infty))$ se e solo se risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2x}\sin^2(cx)}{(x+c)^2}\mathrm{d}x.$$

La funzione integranda ammette limite per $x \to \infty$, pertanto condizione necessaria e sufficiente perché l'integrale converga nel dominio $[0,\infty)$ è che $x\,|f(x)|^2 \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Questo è evidentemente vero per ogni valore di c.
Se $c \leq 0$ la funzione $f(x)$ presenta una divergenza in $x = -c$, il che porta immediatamente a concludere che $f \notin C_2([0,\infty))$. Tuttavia, nel caso in cui $\sin(cx)|_{x=c} = 0$, ovvero per $c = -\sqrt{n\pi}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, la singolarità è eliminabile, cioè f potrebbe essere resa continua in $x = -c$ pur di intendere

$$f(-c) = \lim_{x\to -c} f(x) = 0, \qquad c = -\sqrt{n\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

La funzione $|f(x)|^2$ risulta integrabile intorno alla singolarità $x = -c$ quando questa è eliminabile, cioè per $c = -\sqrt{n\pi}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ma è non integrabile in tutti gli altri casi. Infatti, utilizzando gli sviluppi in serie di Taylor di e^{2x} e $\sin^2(cx)$ intorno a $x = -c$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x} &= \mathrm{e}^{-2c} + 2\mathrm{e}^{-2c}(x+c) + 2\mathrm{e}^{-2c}(x+c)^2 + O((x+c)^3),\\
\sin^2(cx) &= \sin^2(c^2) - 2c\sin(c^2)\cos(c^2)(x+c)\\
&\quad + c^2\left(\cos^2(c^2) - \sin^2(c^2)\right)(x+c)^2 + O((x+c)^3),
\end{aligned}$$

si vede che per $c \leq 0$ con $c \neq -\sqrt{n\pi}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, si ha

$$|f(x)|^2 = \frac{\mathrm{e}^{-2c}\sin^2(c^2)}{(x+c)} + O((x+c)^0).$$

In conclusione, $f \in C_2([0,\infty))$ per $c > 0$ mentre $f \in L_2([0,\infty))$ per $c > 0$ e per $c = -\sqrt{n\pi}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

<u>Esercizio 2</u> Nello spazio Euclideo pesato $(C_2(\mathbb{R};\mathbb{C}), \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x))$ con prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

sia $W = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\}$. Scomporre il vettore $v(x) = \sin(2x)$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$. Si ricordi che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-b^2}$ se $b \in \mathbb{R}$.

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\}$

$$u_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

$$u_2(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\overline{u_1(y)}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{\|u_1\|^2}u_1(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \frac{\sqrt{\pi}/\mathrm{e}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1}$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1}\right)\overline{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1}\right)}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}(1 - \mathrm{e}^{-2}).$$

Risulta $W = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\} = \mathrm{span}\{u_1, u_2\}$. Usando il proiettore π_W costruito in termini di (u_1, u_2), base ortogonale di W,

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k$$

si ha

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2y)\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{\sqrt{\pi}}u_1(x) + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2y)\overline{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y-1})}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{\sqrt{\pi}(1 - \mathrm{e}^{-2})}u_2(x)\\
&= \frac{\sqrt{\pi}(\mathrm{e}^{-1/4} - \mathrm{e}^{-9/4})}{2\mathrm{i}\sqrt{\pi}}u_1(x) + \frac{\sqrt{\pi}(\mathrm{e}^{-9/4} - \mathrm{e}^{-5/4} - \mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-13/4})}{2\mathrm{i}\sqrt{\pi}(1 - \mathrm{e}^{-2})}u_2(x)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-1/4} - \mathrm{e}^{-9/4}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{\mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-5/4}}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1})\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-5/4}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{\mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-5/4}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\\
&= (\mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-5/4})\sin(x)\\
&= \mathrm{e}^{-5/4}(1 + \mathrm{e})\sin(x)
\end{aligned}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = \sin(2x) - \mathrm{e}^{-5/4}(1 + \mathrm{e})\sin(x).$$

Si può verificare che

$$\langle w, z\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\overline{z(x)}e^{-x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

Esercizio 3 Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

a) $x\mathrm{e}^x\delta_0''$ b) $\delta_0[(x-1)\mathrm{e}^x]$ c) $D^2(|\sin x|)$

[punteggio 6]

a) Ricordando l'identità valida per ogni $h \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$h\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(0)\delta_0^{(n-k)},$$

e ponendo $h(x) = x\mathrm{e}^x$, si ha

$$x\mathrm{e}^x\delta_0'' = -2\delta_0' + 2\delta_0.$$

b) Ricordando che se $b(x)$ ha zeri semplici isolati in x_k, $k = 1, 2, \dots,$ vale la formula

$$\delta_0[b(\cdot)] = \sum_k \frac{1}{|b'(x_k)|}\delta_{x_k},$$

si ha

$$\delta_0[(x-1)\mathrm{e}^x] = \mathrm{e}^{-1}\delta_1,$$

ovvero, in un'altra possibile notazione,

$$\delta((x-1)\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{-1}\delta(x-1).$$

c) Osservando che $|\sin x| = \operatorname{sgn}(\sin x)\sin x$ è una funzione continua mentre la sua derivata prima $\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x$ ha discontinuità di valore 2 nei punti $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{aligned}
D^2(|\sin x|) &= D^2(\varphi_{|\sin x|}) \\
&= D(D(\varphi_{\operatorname{sgn}(\sin x)\sin x})) \\
&= D(\varphi_{\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}) \\
&= \varphi_{-\operatorname{sgn}(\sin x)\sin x} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\delta_{k\pi} \\
&= -|\sin x| + \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\delta_{k\pi}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia S l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (\frac{x_2}{2^1}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_4}{2^3}, \frac{x_4}{2^4}, \frac{x_6}{2^5}, \frac{x_6}{2^6}, \dots).$$

Determinare $\|S\|$ e S^*. Stabilire se S è invertibile e, in caso affermativo, determinare S^{-1}.

[punteggio 5]

Per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}\|Sx\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}|^2 \left(\frac{1}{(2^{2k-1})^2} + \frac{1}{(2^{2k})^2} \right) \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}|^2 \\ &\leq \frac{5}{16} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \frac{5}{16} \|x\|_2^2\end{aligned}$$

che implica $\|S\| \leq \sqrt{5}/4$. D'altro canto, per $x = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha $Sx = (1/2, 1/4, 0, 0, \dots)$ e quindi

$$\frac{\|Sx\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{5}/4}{1} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

che implica $\|S\| \geq \sqrt{5}/4$. In conclusione $\|S\| = \sqrt{5}/4$.
L'operatore aggiunto S^* è definito dalla relazione $\langle S^*x, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\langle S^*x, y\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (S^*x)_k \overline{y_k} \\ \langle x, Sy\rangle &= \left(\frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} \right) \overline{y_2} + \left(\frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} \right) \overline{y_4} + \left(\frac{x_5}{2^5} + \frac{x_6}{2^6} \right) \overline{y_6} + \dots\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue

$$S^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (0, \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2}, 0, \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4}, 0, \frac{x_5}{2^5} + \frac{x_6}{2^6}, \dots).$$

L'operatore S non è iniettivo, infatti

$$\operatorname{Ker} S = \{x \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ Sx = 0\} = \{x \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ x_{2k} = 0, \ k = 1, 2, \dots\}.$$

Quindi S non è invertibile.

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(C([0,\pi];\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = g(x)f(x),$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} 2^x & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & 1 \leq x \leq \pi \end{cases} .$$

Determinare lo spettro di T. Quanto vale $\|T\|$?

[punteggio 6]

Determiniamo $\mathrm{Ker}(zI - T) = \{f \in C([0,\pi];\mathbb{C}) : (zI - T)f = 0\}$ al variare di $z \in \mathbb{C}$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)f = 0$ implica

$$(z - g(x))f(x) = 0, \qquad \forall x \in [0,\pi].$$

Se $z \in \mathbb{C} \setminus ([1,2) \cup [2,\pi+1])$, il fattore $z - g(x)$ non si annulla mai per $x \in [0,\pi]$ e quindi l'unica soluzione è quella banale $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo e z non è un autovalore. Se $z \in [1,2)$, il fattore $z - g(x)$ si annulla nel punto $x_z = \ln z$. Per $x \neq x_z$ si ha $f(x) = 0$ e, dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo e z non è un autovalore. Alla stessa conclusione si giunge se $z \in [2,\pi+1]$. Pertanto $\sigma_p(T) = \emptyset$.
Per determinare lo spettro continuo occorre studiare $\mathrm{Ran}(zI - T) = \{h \in C([0,\pi];\mathbb{C}) : h = (zI - T)f, \ f \in C([0,\pi];\mathbb{C})\}$ al variare di $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$. Affinchè $(zI - T)f = h$, deve essere

$$f(x) = \frac{h(x)}{z - g(x)}, \qquad \forall x \in [0,\pi] : \ z - g(x) \neq 0.$$

Se $z \in [1,2)$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$, con $x_z = \ln z$, la f diverge in x_z e quindi risulta non continua in questo punto. Segue che $\mathrm{Ran}(zI - T)$ non coincide con $C([0,\pi];\mathbb{C})$, cioè $zI - T$ è non suriettivo ma iniettivo. Pertanto $z \in \sigma_c(T)$. Allo stesso risultato si giunge se $z \in [2,\pi+1]$. Se $z \in \mathbb{C} \setminus ([1,2) \cup [2,\pi+1])$, il fattore $z - g(x)$ non si annulla mai per $x \in [0,\pi]$ e la funzione f risulta continua in $[0,\pi]$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e iniettivo e quindi invertibile, cioè $z \in \rho(T)$. Riepilogando, $\sigma_c(T) = [1,2) \cup [2,\pi+1] = [1,\pi+1]$.
Dalla relazione $\sigma(T) \subset \overline{B}(0,\|T\|)$ si ha $\|T\| \geq \pi + 1$. D'altro canto $\forall f \in C([0,\pi];\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tf\|_u = \sup_{x \in [0,\pi]} |g(x)f(x)| \leq (\pi + 1) \sup_{x \in [0,\pi]} |f(x)| = (\pi + 1)\|f\|_u$$

cioè $\|T\| \leq \pi + 1$. Si conclude che $\|T\| = \pi + 1$.

Esercizio 6 Determinare lo sviluppo in serie di Fourier nella base delle funzioni seno e coseno di $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \left\lfloor \sqrt{|x|} \right\rfloor,$$

dove $\lfloor\cdot\rfloor$ è la funzione parte intera. Studiare la convergenza puntuale della serie così ottenuta. Calcolare infine la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\sin^2(k)$.

[punteggio 6]

Risulta $f(-x) = f(x)$ con $f(x) = 0$ per $0 \le x < 1$ e $f(x) = 1$ per $1 \le x \le \pi$. Pertanto $f \in L_1[-\pi, \pi]$ e ammette lo sviluppo in serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

con

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_1^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\frac{\sin(k)}{k} \end{aligned}$$

se $k \ge 1$, mentre per $k = 0$ si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}(\pi - 1).$$

La funzione f è differenziabile a tratti e il suo prolungamento 2π-periodico a $\mathbb{R}$ è una funzione discontinua solo nei punti $x = \pm 1$. Segue che la serie di Fourier sopra scritta converge a $f(x)$ per ogni $x \neq \pm 1$ mentre per $x = \pm 1$ la serie converge al valore $1/2$.
L'uguaglianza di Parseval si scrive

$$\langle f, f\rangle = 2(\pi - 1) = \left|\frac{a_0}{2}\right|^2 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\,\pi = \frac{2}{\pi}(\pi - 1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\sin^2(k)}{k^2}$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k)}{k^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$