MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2013/2014 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 8 luglio 2014

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^n}$$

converge uniformemente in $\overline{B}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq r\}$ con $r < 1$ arbitrario.

[punteggio 5]

Si fissi $r < 1$ arbitrario. Per $|z| \leq r$ il termine n-esimo della serie ha come maggiorante

$$\left| \frac{z^{2n}}{1-z^n} \right| \leq \frac{|z|^{2n}}{1-|z|^n} \leq \frac{r^{2n}}{1-r}.$$

La serie numerica di questi maggioranti è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{1-r} = \frac{1}{1-r} \sum_{n=1}^{\infty} (r^2)^n = \frac{r^2}{(1-r)(1-r^2)} < \infty$$

in quanto riconducibile a una serie geometrica di ragione $r^2 < 1$. Per il criterio di Weierstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}/(1-z^n)$ risulta convergente uniformemente in $\overline{B}(0,r)$.

Esercizio 2 Sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ una funzione continua e non nulla nell'insieme aperto $G \subset \mathbb{C}$. Sia inoltre f^2 analitica in G. Dimostrare che f è analitica in G.

[punteggio 5]

Dobbiamo mostrare che $f(z)$ ha derivata prima $\forall z \in G$. Per ipotesi f^2 è derivabile in G pertanto $\forall z \in G$ esiste in $\mathbb{C}$ il limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)^2 - f(z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (f(z+\Delta z) + f(z)) \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Poiché f è continua e non nulla in G, esiste in $\mathbb{C}$ ed è diverso da 0 il limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} (f(z+\Delta z) + f(z)) = 2f(z) \neq 0.$$

Si conclude che esiste in $\mathbb{C}$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2f(z)} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)^2 - f(z)^2}{\Delta z}.$$

Alternativamente, si ponga $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, con x, y reali tali che $z = x + \mathrm{i}y \in G$. Poiché $f^2 = (u^2 - v^2) + \mathrm{i}2uv$ è analitica in G, valgono in G le condizioni di Cauchy–Riemann

$$\begin{aligned} (u^2 - v^2)_x &= (2uv)_y, \\ (u^2 - v^2)_y &= -(2uv)_x, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} u(u_x - v_y) - v(u_y + v_x) &= 0, \\ v(u_x - v_y) + u(u_y + v_x) &= 0. \end{aligned}$$

Si consideri questo come un sistema lineare omogeneo rispetto alle incognite $(u_x - v_y)$ e $(u_y + v_x)$. Poiché il determinante associato è $u^2 + v^2 \neq 0$, si ricordi che $f(z) \neq 0 \ \forall z \in G$, esiste la sola soluzione banale

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= 0, \\ u_y + v_x &= 0. \end{aligned}$$

Valgono quindi in G le condizioni di Cauchy–Riemann per la funzione f. Essendo f, e quindi u e v, continue in G, tali condizioni sono sufficienti per stabilire l'esistenza di f' in tutto G.

Esercizio 3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cosh(z) = \mathrm{i}.$$

[punteggio 5]

L'equazione da risolvere è

$$\frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \mathrm{i},$$

ovvero

$$(\mathrm{e}^z)^2 - 2\mathrm{i}\mathrm{e}^z + 1 = 0,$$

che fornisce

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{i} + \sqrt{\mathrm{i}^2 - 1} = \mathrm{i}(1 \pm \sqrt{2}).$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned} z &= \log(\mathrm{i}(1 \pm \sqrt{2})) = \log((\sqrt{2} \pm 1)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/2}) \\ &= \ln(\sqrt{2} \pm 1) + \mathrm{i}(\pm\pi/2 + 2\pi k), \\ &= \pm(\ln(\sqrt{2} + 1) + \mathrm{i}\pi/2) + \mathrm{i}2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{\sin(\log z)}{z}\mathrm{d}z,$$

dove γ è il cammino, percorso in verso antiorario, costituito dal perimetro del rombo di vertici $\pm a$ e $\pm \mathrm{i}b$, con a e b reali positivi.

[punteggio 6]

Posto $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, il ramo principale di $-\cos(\log z) = -\cos(\ln r + \mathrm{i}\theta)$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(-\cos(\log z)) = \frac{\sin(\log z)}{z}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\sin(\log z)}{z}\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to 0}\, (-\cos(\log z))\big|_{z=-a-\mathrm{i}\varepsilon}^{z=-a+\mathrm{i}\varepsilon} \\
&= -\cos(\ln a + \mathrm{i}\pi) + \cos(\ln a - \mathrm{i}\pi) \\
&= -(\cos(\ln a)\cos(\mathrm{i}\pi) - \sin(\ln a)\sin(\mathrm{i}\pi)) \\
&\quad\; + (\cos(\ln a)\cos(\mathrm{i}\pi) + \sin(\ln a)\sin(\mathrm{i}\pi)) \\
&= 2\mathrm{i}\sin(\ln a)\sinh(\pi).
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare il residuo in $z = 0$ della funzione

$$\frac{1}{z^3}\,(\cos z)^{1/z^2}\,.$$

[punteggio 6]

Usando gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < \infty,$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \qquad |z| < 1,$$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad |z| < \infty,$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3}\,(\cos z)^{1/z^2} &= \frac{1}{z^3}\exp\left(\frac{1}{z^2}\log(\cos z)\right) \\
&= \frac{1}{z^3}\exp\left(\frac{1}{z^2}\log\left(1+\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{z^3}\exp\left(\frac{1}{z^2}\left(\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. -\frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\right)^2+\dots\right)\right) \\
&= \frac{1}{z^3}\exp\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{45}z^4+\dots\right) \\
&= \frac{1}{z^3}\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{45}z^4+\dots\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}z^3}\left(1+\left(-\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{45}z^4+\dots\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{45}z^4+\dots\right)^2+\dots\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}z^3}-\frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}z}-\frac{3z}{160\sqrt{\mathrm{e}}}+O(z^3).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z^3}\,(\cos z)^{1/z^2} = -\frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale di Bromwich

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{x_0-\mathrm{i}\infty}^{x_0+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{zt}\frac{1}{(z-5)^3}\mathrm{d}z, \qquad t>0, \quad x_0>5.$$

[punteggio 6]

Posto $g(z) = 1/(z-5)^3$, si tratta di determinare la funzione $f(t)$, antitrasformata di Laplace di $g(z)$, valutando l'integrale di Bromwich

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\lim_{y_0\to\infty}\int_{\lambda_{y_0}} \mathrm{e}^{zt}g(z)\mathrm{d}z, \qquad t>0,$$

dove $\lambda_{y_0}(y) = x_0 + \mathrm{i}y$ con $-y_0 \le y \le y_0$, $y_0 > 0$, e x_0 arbitrario purché $x_0 > 5$. L'integrale può essere valutato con la tecnica dei residui. Si consideri il cammino chiuso $\lambda_{y_0} + \gamma_{y_0}$ dove $\gamma_{y_0}(\theta) = x_0 + y_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\pi/2 \le \theta \le 3\pi/2$. Per $z \in \{\gamma_{y_0}\}$ si ha

$$|g(z)| = \frac{1}{|z-5|^3} \le \frac{1}{||z|-5|^3} \le \frac{1}{(y_0-|x_0|-5)^3} \xrightarrow{y_0\to\infty} 0.$$

Per il lemma di Jordan si ha

$$\left|\int_{\gamma_{y_0}} \mathrm{e}^{zt}g(z)\mathrm{d}z\right| \xrightarrow{y_0\to\infty} 0$$

e quindi

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{z=5}\left(\mathrm{e}^{zt}g(z)\right), \qquad t>0.$$

La funzione $\mathrm{e}^{zt}g(z)$ ha in $z=5$ un polo triplo e nell'anello $0<|z-5|<\infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\mathrm{e}^{zt}g(z) = \mathrm{e}^{5t}\mathrm{e}^{(z-5)t}\frac{1}{(z-5)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{5t}t^n}{n!}(z-5)^{n-3}.$$

Si conclude

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{5t}t^2}{2}, \qquad t>0.$$

È facile verificare che per $\operatorname{Re} z > 5$ la trasformata di Laplace di $f(t)$ è $g(z)$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-zt}\frac{\mathrm{e}^{5t}t^2}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{(z-5)^3}, \qquad z\in\mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z>5.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2013/2014 – Prof. C. Presilla

Prova B2 – 8 luglio 2014

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Siano $p > 1$ e $q > 1$ due numeri reali tali che $1/p + 1/q = 1$. Dimostrare che per ogni coppia a, b di numeri reali non negativi vale la disuguaglianza

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 45.

Esercizio 2 Sia $F : \ell_0(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ un generico funzionale lineare continuo su $\ell_0(\mathbb{R})$. Dimostrare che $\exists a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \ell_1(\mathbb{R})$ tale che

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \qquad \forall x \in \ell_0(\mathbb{R}).$$

[punteggio 5]

Scelto un generico vettore $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_0(\mathbb{R})$, cioè una successione reale per la quale risulti $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, e detta $(e^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ la successione di vettori canonici di componenti $e_j^{(k)} = \delta_{k,j}$, si ha che $\sum_{k=1}^{n} x_k e^{(k)}$ converge in norma a x

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e^{(k)}\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Per la continuità e la linearità di F, risulta

$$F(x) = F(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e^{(k)}) = \lim_{n\to\infty} F(\sum_{k=1}^{n} x_k e^{(k)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k F(e^{(k)}).$$

Posto $a_k = F(e^{(k)}) \in \mathbb{R}$, abbiamo quindi

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \qquad \forall x \in \ell_0(\mathbb{R}).$$

Rimane da dimostrare che $a \in \ell_1(\mathbb{R})$ ovvero che $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Si consideri la successione $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ di vettori $x^{(n)} \in \ell_0(\mathbb{R})$ definiti come

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_k) & 1 \le k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}.$$

Per n arbitrario, risulta $\|x^{(n)}\|_\infty = 1$ e quindi, essendo F continuo ovvero limitato,

$$\left| F(x^{(n)}) \right| \le \|F\| \; \|x^{(n)}\|_\infty = \|F\| < \infty.$$

D'altro canto

$$\left| F(x^{(n)}) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{sgn}(a_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| < \infty.$$

Dall'arbitrarietà di n segue $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Esercizio 3 Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

a) $\sin(x)\delta_0^{(3)}$, b) $e^{|x|}D^2(\cos(x)e^{-|x|})$.

[punteggio 6]

---

a) Ricordando l'identità valida per ogni funzione $h \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$h(x)\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(0)\delta_0^{(n-k)},$$

e ponendo $h(x) = \sin(x)$, si ha

$$\begin{aligned}\sin(x)\delta_0^{(3)} &= \sin(0)\delta_0^{(3)} - 3\cos(0)\delta_0^{(2)} - 3\sin(0)\delta_0^{(1)} + \cos(0)\delta_0 \\ &= -3\delta_0'' + \delta_0.\end{aligned}$$

b) Confondendo, come al solito, una distribuzione regolare con la funzione associata, valgono le regole

$$\begin{aligned}&D(g(|x|)) = g'(|x|)\operatorname{sgn}(x),\\ &D(fg) = fg' + gf',\\ &D(\operatorname{sgn}(x)) = 2\delta_0.\end{aligned}$$

Nel caso specifico pertanto si ha

$$\begin{aligned}e^{|x|}D^2(\cos(x)e^{-|x|}) &= e^{|x|}D(-\sin(x)e^{-|x|} - \cos(x)e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x))\\ &= e^{|x|}(-\cos(x)e^{-|x|} + \sin(x)e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x)\\ &\quad + \sin(x)e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x) + \cos(x)e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x)^2 - \cos(x)e^{-|x|}2\delta_0)\\ &= e^{|x|}(2\sin(x)e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x) - \cos(x)e^{-|x|}2\delta_0)\\ &= 2\sin(x)\operatorname{sgn}(x) - 2\delta_0.\\ &= 2\sin(|x|) - 2\delta_0.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,\pi]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ sia $W = \text{span}\{x, x^3\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^2$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$.

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi il sistema di vettori x, x^3

$$u_1(x) = x,$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^3}{3},$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^3 - \frac{3\pi^2}{5} x,$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^\pi \left(x^3 - \frac{3\pi^2}{5}x\right)^2 dx = \frac{4\pi^7}{175}.$$

Usando il proiettore π_W

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k,$$

si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x^2, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k(x) = \frac{3\pi}{4} x + \frac{35}{48\pi}\left(x^3 - \frac{3\pi^2}{5}x\right) = \frac{35}{48\pi} x^3 + \frac{5\pi}{16} x$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = -\frac{35}{48\pi^5} x^3 + x^2 - \frac{5\pi}{16} x.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^\pi \left(\frac{35}{48\pi} x^3 + \frac{5\pi}{16} x\right)\left(-\frac{35}{48\pi^5} x^3 + x^2 - \frac{5\pi}{16} x\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Esercizio 5 Sia U un generico operatore lineare limitato su V spazio di Hilbert complesso. Dimostare che se U è unitario, cioè se $U^*U = UU^* = I$, allora $\|U\| = 1$ e $\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$.

[punteggio 6]

Per ogni vettore $x \in V$ si ha

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle (U^*)^* x, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

e quindi

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = 1.$$

Se $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > 1$ allora $\|z^{-1}U\| = |z|^{-1} \|U\| < 1$. Per la completezza dello spazio V, l'operatore $I - z^{-1}U$ risulta quindi invertibile. Concludiamo che è invertibile anche l'operatore risolvente di U in z

$$zI - U = z(I - z^{-1}U).$$

Se $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$ allora $\|zU^*\| = |z| \|U^*\| = |z| \|U\| < 1$. Per la completezza dello spazio V, l'operatore $I - zU^*$ risulta quindi invertibile. Concludiamo che è invertibile anche l'operatore risolvente di U in z

$$zI - U = -U(I - zU^*).$$

Poiché $z \in \rho(U)$ per $|z| > 1$ e $|z| < 1$, segue che $\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$.

Esercizio 6 Sia $\chi_{[-a,a]}(x)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-a, a]$, $a > 0$. Posto $g(\lambda) = \mathcal{F}[\chi_{[-a,a]}(x)](\lambda)$, stabilire, senza eseguire calcoli, con quale velocità $g(\lambda)$ converge a zero per $\lambda \to \pm\infty$ e fino a che ordine $g(\lambda)$ è derivabile rispetto a λ. Infine, calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = x^3\chi_{[-a,a]}(x)$.

[punteggio 6]

Iniziamo con l'osservare che la funzione $\chi_{[-a,a]}(x)$ è già essa continua a tratti. Pertanto, senza calcolare $g(\lambda)$, possiamo solo concludere che $g(\lambda) \in C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. D'altro canto, la funzione $x^k\chi_{[-a,a]}(x)$, continua in $(-a, a)$ e a supporto compatto $[-a, a]$, appartiene a $L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ per ogni intero k. Tanto basta per concludere che $g(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Inoltre vale la relazione

$$\mathcal{F}[(-\mathrm{i}x)^k\chi_{[-a,a]}(x)](\lambda) = g^{(k)}(\lambda).$$

La trasformata di Fourier di $f(x) = x^3\chi_{[-a,a]}(x)$ è quindi esprimibile in termini della derivata terza di $g(\lambda)$

$$\mathcal{F}[f(x)](\lambda) = \mathcal{F}[x^3\chi_{[-a,a]}](\lambda) = -\mathrm{i}g'''(\lambda).$$

Poiché

$$g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}}{-\mathrm{i}\lambda}\right|_{-a}^{a} = \frac{2\sin(\lambda a)}{\lambda},$$

risulta

$$g'(\lambda) = \frac{2a}{\lambda}\cos(\lambda a) - \frac{2}{\lambda^2}\sin(\lambda a),$$

$$g''(\lambda) = -\frac{2a^2}{\lambda}\sin(\lambda a) - \frac{4a}{\lambda^2}\cos(\lambda a) + \frac{4}{\lambda^3}\sin(\lambda a),$$

$$g'''(\lambda) = -\frac{2a^3}{\lambda}\cos(\lambda a) + \frac{6a^2}{\lambda^2}\sin(\lambda a) + \frac{12a}{\lambda^3}\cos(\lambda a) - \frac{12}{\lambda^4}\sin(\lambda a).$$