MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova B1 – 9 giugno 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se $\|\cdot\|$ è una norma nello spazio vettoriale indicato.

a) $\|x\| = |x_1 + x_2|^2 + |x_2 + x_3|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^3$

b) $\|x\| = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{1/2}}, \qquad x \in \ell_{5/3}(\mathbb{R})$

c) $\|x\| = \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^2\,, \qquad x \in \ell_3(\mathbb{R})$

d) $\|f\| = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\,, \qquad f \in L_1(\mathbb{R})$

e) $\|f\| = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \qquad f \in C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$

[punteggio 5]

a) No. Se $x = (1, -1, 1)$ si ha $\|x\| = 0$. Anche la proprietà $\|cx\| = |c|\,\|x\|$ è violata.
b) Si. Per la disuguaglianza di Hölder con $p = 5/3$ e $q = 5/2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{k^{1/2}}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{5/3}\right)^{3/5} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^{1/2}}\right|^{5/2}\right)^{2/5}$$
$$= \|x\|_{5/3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/4}} < \infty$$

c) No. $\|cx\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |cx_k|^2 = |c|^2 \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^2 \neq |c|\,\|x\|$.
d) No. Per la funzione $f(x) = 1/\sqrt{x}\chi_{(0,1]}(x)$ risulta $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| = 2$, cioè $f \in L_1(\mathbb{R})$, ma $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \infty$.
e) Si. Risulta $C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}) \subset C_2(\mathbb{R})$ e $(C_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ spazio vettoriale normato.

Esercizio 2 Dimostrare che $\ell_p \subset \ell_q$ se $1 \leq p < q$.

[punteggio 5]

Si veda *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, teorema 3.28 pagina 55.

Esercizio 3 Determinare la derivata della distribuzione regolare φ_g associata alla funzione

$$g(x) = \cos(x)e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x)\chi_{[-2,3]}(x)$$

dove $\chi_{[a,b]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$, cioè $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ se $x \in [a,b]$ e $\chi_{[a,b]}(x) = 0$ altrove.

[punteggio 6]

Si osservi che $\chi_{[-3,2]}(x)\chi_{[-2,3]}(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$. La funzione g è continua a tratti (questo assicura che φ_g è una distribuzione) con discontinuità nei punti $u_1 = -2$ e $u_2 = 2$ di valore

$$\begin{aligned} h_1 &= g(u_1^+) - g(u_1^-) = \cos(-2)e^{|-2|} = \cos(2)e^2 \\ h_2 &= g(u_2^+) - g(u_2^-) = -\cos(2)e^{|2|} = -\cos(2)e^2 \end{aligned}$$

La derivata di g esiste continua a tratti (questo assicura che $\varphi_{g'}$ è una distribuzione) e vale

$$\begin{aligned} g'(x) &= \begin{cases} 0 & x < -2 \\ -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} & -2 < x < 0 \\ -\sin(x)e^{x} + \cos(x)e^{x} & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases} \\ &= (-\sin(x) + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-2,2]}(x) \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\varphi_g' = \varphi_{g'} + e^2\cos(2)\delta_{-2} - e^2\cos(2)\delta_2$$

Alternativamente, osservando che $\chi_{[-2,2]}(x) = H(x+2) - H(x-2)$, dove H è la funzione di Heavyside, si ha

$$\begin{aligned} D[\cos(x)e^{|x|}\chi_{[-2,2]}(x)] &= D[\cos(x)]e^{|x|}\chi_{[-2,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)D[e^{|x|}]\chi_{[-2,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)e^{|x|}D[\chi_{[-2,2]}(x)] \\ &= -\sin(x)e^{|x|}\chi_{[-2,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)\operatorname{sgn}(x)e^{|x|}\chi_{[-2,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)e^{|x|}(\delta_{-2} - \delta_2) \\ &= (-\sin(x) + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-2,2]}(x) \\ &\quad + e^2\cos(2)\delta_{-2} - e^2\cos(2)\delta_2 \end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia T l'operatore lineare su $(C_2([a,b];\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito come

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

con K continua in $[a,b]\times[a,b]$. Dimostrare che T è continuo e determinare un limite superiore per la sua norma. Determinare infine $K^*(x,y)$ tale che

$$(T^*f)(x) = \int_a^b K^*(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

[punteggio 5]

Per ogni $f \in C_2([a,b];\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tf\|_2^2 = \int_a^b |(Tf)(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x$$

e utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz-Buniakowsky,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right|^2 &\leq \int_a^b |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y \int_a^b |fy)|^2\,\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\ \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

segue

$$\|Tf\|_2^2 \leq \int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\ \|f\|_2^2$$

Di conseguenza T è limitato, quindi continuo, e risulta

$$\|T\| \leq \left(\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

L'aggiunto di T è determinato dalla relazione $\langle T^*f, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ con f, g arbitrarie funzioni di $(C_2([a,b];\mathbb{C})$. Considerando che

$$\langle T^*f, g\rangle = \int_a^b (T^*f)(x)\ \overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b\int_a^b K^*(x,y)f(y)\mathrm{d}y\ \overline{g(x)}\mathrm{d}x,$$

$$\langle f, Tg\rangle = \int_a^b f(x)\overline{\int_a^b K(x,y)g(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x = \int_a^b\int_a^b \overline{K(x,y)}f(x)\mathrm{d}x\overline{g(y)}\mathrm{d}y,$$

scambiando x con y in quest'ultimo integrale e uguagliando, per l'arbitrarietà di f e g, si conclude

$$K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}.$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \dots).$$

Determinare la norma di T e il suo spettro.

[punteggio 6]

Per determinare la norma di T si osservi che $\forall x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2$$

e quindi

$$\|T\| = \sup_{x \in \ell_2(\mathbb{C}),\ x \neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} = 1.$$

L'equazione agli autovalori $Tx = zx$, con $z \in \mathbb{C}$, fornisce per $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} x_{2k} &= z x_{2k-1} \\ x_{2k-1} &= z x_{2k} \end{aligned}$$

Da qyesta coppia di equazioni risulta $x_{2k-1} = z^2 x_{2k-1}$ e $x_{2k} = z^2 x_{2k}$. È quindi possibile avere una soluzione $x \neq 0$ solo se $z^2 = 1$. Gli autovalori di T sono quindi $z = \pm 1$. Gli autovettori corrispondenti sono gli infiniti vettori di $\ell_2(\mathbb{C})$ del tipo $(x_1, \pm x_1, x_3, \pm x_3, x_5, \pm x_5, \dots)$.
Per $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, l'operatore $zI - T$ è dunque iniettivo. Per determinare quando risulta anche suriettivo, studiamo l'equazione $(zI - T)x = y$, che in termini di componenti $k = 1, 2, 3, \dots$ fornisce

$$\begin{aligned} z x_{2k-1} - x_{2k} &= y_{2k-1} \\ -x_{2k-1} + z x_{2k} &= y_{2k} \end{aligned}$$

Questa coppia di equazioni, pensata come un sistema lineare nelle incognite x_{2k-1}, x_{2k}, ammette soluzione per y_{2k-1}, y_{2k} arbitrari quando il determinante del sistema è diverso da zero, cioè per $z^2 - 1 \neq 0$. Si conclude che $zI - T$ è suriettivo, pertanto invertibile, per ogni $z \neq \pm 1$. In conclusione $\sigma_p(T) = \{\pm 1\}$ e $\sigma_c(T) = \emptyset$. Si osservi che, come deve essere, $\sigma(T)$ è chiuso e $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$.

Esercizio 6 Determinare lo sviluppo in serie di Fourier complessa della funzione $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ con $f(x) = \sinh x$. Calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^2/(1+k^2)^2$. Si ricorda che $\int \sinh^2 x \, \mathrm{d}x = -x/2 + \sinh(2x)/4$.

[punteggio 6]

Poiché $f \in L_1[-\pi, \pi]$, tale funzione ammette lo sviluppo in serie di Fourier complessa

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

con

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)x} \mathrm{d}x - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}k)x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)\pi} - \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}k)\pi}}{(1-\mathrm{i}k)} + \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}k)\pi} - \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}k)\pi}}{(1+\mathrm{i}k)} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)\pi} - \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}k)\pi})(1+\mathrm{i}k) + (\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}k)\pi} - \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}k)\pi})(1-\mathrm{i}k)}{4\pi(1+k^2)} \\ &= \frac{\cosh \pi \sin(k\pi) - k \sinh \pi \cos(k\pi)}{\mathrm{i}\pi(1+k^2)} \\ &= -\frac{(-1)^k k \sinh \pi}{\mathrm{i}\pi(1+k^2)}. \end{aligned}$$

Si osservi che $c_0 = 0$ e $c_{-k} = -c_k$, così che

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{i}c_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2k \sinh \pi}{\pi(1+k^2)} \sin(kx)$$

in accordo con il fatto che $f(x)$ è reale dispari.
Dall'uguaglianza di Parseval

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \, 2\pi = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

e osservando che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \, 2\pi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k^2 \sinh^2 \pi}{\pi^2 (1+k^2)^2} 2\pi = \frac{4 \sinh^2 \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+k^2)^2}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh(2x) \Big|_{-\pi}^{+\pi} = -\pi + \sinh \pi \cosh \pi$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+k^2)^2} = \frac{\pi \cosh \pi}{4 \sinh \pi} - \frac{\pi^2}{4 \sinh^2 \pi}$$