MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2012/2013 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 9 luglio 2013

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Determinare il residuo in $z = -2$ della funzione

$$f(z) = \frac{(z+2)^4}{z-3} \sin\left(\frac{1}{z+2}\right).$$

[punteggio 5]

La funzione $f(z)$ presenta una singolarità essenziale in $z = -2$ ed un polo semplice in $z = 3$, altrove è analitica. Nell'anello $A(-2, 0, 5)$ è sviluppabile in serie di Laurent. Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \qquad |z| < \infty,$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad |z| < 1,$$

per $0 < |(z+2)/3| < 1$ si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{z+2}{5}} \, (z+2)^4 \sin\left(\frac{1}{z+2}\right) \\ &= -\frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} (z+2)^{k+4} \, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Al residuo di $f(z)$ in $z = -2$ contribuiscono tutti i termini ottenuti dal precedente prodotto fra serie per i quali $k+4-(2n+1) = -1$, cioé $n = k/2+2$. Questa relazione può essere soddisfatta solo per k pari. Posto $k = 2j$, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) &= -\frac{1}{5} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2j}} \frac{(-1)^{j+2}}{(2j+5)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{5^{2j+1}(2j+5)!} \\ &= -\frac{1}{600} + \frac{1}{630000} + \dots . \end{aligned}$$

<u>Esercizio 2</u> Determinare, motivando la risposta, il dominio di analiticità della seguente funzione e calcolarne la derivata prima

$$f(z) = (\ln r)^2 - \theta^2 + \mathrm{i}2\theta \ln r,$$

dove $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$ e $r \geq 0$.

[punteggio 5]

Posto $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$, si ha

$$u(r,\theta) = (\ln r)^2 - \theta^2, \qquad v(r,\theta) = 2\theta \ln r.$$

Innanzitutto si osservi che per $r = 0$, cioé $z = 0$, f non è definita né sarebbe possibile definirla in modo da risultare continua. In tale punto quindi f non è derivabile. Si osservi poi che per ogni $r > 0$ si ha $v(r,\pi) \neq \lim_{\theta\to-\pi} v(r,\theta)$, pertanto lungo il semiasse reale negativo, origine esclusa, f risulta non continua e quindi non derivabile. Per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$u_r(r,\theta) = \frac{2}{r}\ln r, \qquad u_\theta(r,\theta) = -2\theta,$$
$$v_r(r,\theta) = \frac{2\theta}{r}, \qquad v_\theta(r,\theta) = 2\ln r,$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Nello stesso dominio $f(z)$ risulta quindi derivabile e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r,\theta) + \mathrm{i}v_r(r,\theta))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= \left(\frac{2}{r}\ln r + \mathrm{i}\frac{2\theta}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= \frac{2}{z}g(z), \qquad g(z) = \ln r + \mathrm{i}\theta. \end{aligned}$$

in accordo con il fatto che $f(z) = g(z)^2 = (\log z)^2$. Il dominio di analiticità di f è $D = \{z \in \mathbb{C}:\ z \neq -t,\ t \in [0,\infty)\}$.

Esercizio 3 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z,$$

dove γ è una curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente passante per il punto $z_0 - R$, con $R > 0$, e tale $z_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$. Si consideri $q \neq 0$ reale arbitrario.

[punteggio 6]

Il ramo principale della funzione integranda

$$(z - z_0)^{q-1} = \mathrm{e}^{(q-1)\log(z-z_0)}$$

è una funzione analitica in $D = \mathbb{C} \setminus \sigma$ dove $\sigma = \{z(u) = z_0 - u,\ u \in [0, \infty)\}$ è la linea di diramazione del ramo principale di $\log(z - z_0)$ che interseca la curva γ nel punto $z_0 - R$. Parametrizzato il cammino $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ in modo tale che $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0 - R$, definiamo un nuovo cammino $\gamma_\varepsilon : [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \mapsto \mathbb{C}$ con $\varepsilon > 0$ tale che $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t)\ \forall t \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Evidentemente si ha

$$\int_\gamma (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z.$$

La traccia di γ_ε è contenuta in D e in D il ramo principale della funzione integranda ammette come primitiva il ramo principale di $q^{-1}(z - z_0)^q$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{e}^{q\log(z-z_0)}}{q} = \mathrm{e}^{(q-1)\log(z-z_0)}.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\varepsilon} (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{e}^{q\log(\gamma_\varepsilon(b-\varepsilon)-z_0)}}{q} - \frac{\mathrm{e}^{q\log(\gamma_\varepsilon(a+\varepsilon)-z_0)}}{q} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{q\log(\gamma(b-\varepsilon)-z_0)}}{q} - \frac{\mathrm{e}^{q\log(\gamma(a+\varepsilon)-z_0)}}{q}.\end{aligned}$$

Prendendo il limite $\varepsilon \to 0$ concludiamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{e}^{q\log(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})}}{q} - \frac{\mathrm{e}^{q\log(R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})}}{q} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{q\ln R}}{q} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi q} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi q}\right) \\ &= 2\mathrm{i}\frac{\sin(\pi q)}{q} R^q.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia γ_n il perimetro del quadrato di vertici $(-1-\mathrm{i})a_n$, $(1-\mathrm{i})a_n$, $(1+\mathrm{i})a_n$ e $(-1+\mathrm{i})a_n$, con $a_n = (n+1/2)\pi$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} \mathrm{d}z = 0.$$

[punteggio 6]

È sufficiente mostrare che il modulo dell'integrale tende a 0 per $n \to \infty$. Per la disuaglianza di Darboux

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} \mathrm{d}z \right| \le L_{\gamma_n} \sup_{z\in\{\gamma_n\}} \left| \frac{1}{z^2 \sin z} \right|,$$

dove $L_{\gamma_n} = 8a_m$ è la lunghezza di γ_n. Per $z \in \{\gamma_n\}$ evidentemente risulta $|z|^2 \ge a_n^2$. Inoltre, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}
|\sin(x+\mathrm{i}y)|^2 &= |\sin x \cos(\mathrm{i}y) + \cos x \sin(\mathrm{i}y)|^2 \\
&= |\sin x \cosh y - \mathrm{i} \cos x \sinh y|^2 \\
&= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y.
\end{aligned}$$

Pertanto, lungo i due lati del quadrato γ_n con $x = \pm a_n$ e $-a_n \le y \le a_n$ risulta $|\sin z|^2 \ge \sin^2 a_n = 1$ mentre lungo gli altri due lati con $-a_n \le x \le a_n$ e $y = \pm a_n$ si ha $|\sin z|^2 \ge \sinh^2 a_n$. Ne segue che per $z \in \{\gamma_n\}$ $|\sin z| \ge \min(1, \sinh a_n) = 1$. Possiamo quindi concludere che

$$\sup_{z\in\{\gamma_n\}} \left| \frac{1}{z^2 \sin z} \right| \le \frac{1}{a_n^2}$$

che comporta

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} \mathrm{d}z \right| \le 8a_n \frac{1}{a_n^2} = \frac{8}{\pi(n+1/2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Esercizio 5 Sia f analitica e non costante in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Dimostrare che $|f|$ non ha massimo in D, cioè non esiste un punto $z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in D$.

[punteggio 5]

Si ragioni per assurdo e si supponga che $\exists z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in D$. Poiché D è aperto, $\exists r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subset D$. Sia $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ un cammino circolare di centro z_0 orientato positivamente di raggio $\rho < r$. Per la formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t.$$

Prendendo il modulo di entrambi i membri di questa equazione e maggiorando l'integrale si ottiene

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \right| \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \sup_{t \in [0,2\pi]} \left| f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \right| \\ &\leq |f(z_0)|, \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_0^{2\pi} \left(|f(z_0)| - \left| f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \right| \right) \mathrm{d}t = 0.$$

Essendo la funzione integranda non negativa, dal valore di questo integrale segue che $\left| f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \right| = |f(z_0)|$ $\forall t \in [0, 2\pi]$. D'altro canto $\rho < r$ è arbitrario e quindi $|f(z)| = |f(z_0)|$ $\forall z \in B(z_0, r)$. Poiché f è analitica e di modulo costante in $B(z_0, r)$ allora essa è costante in $B(z_0, r)$. Se $f(z) = f(z_0)$ in $B(z_0, r)$, per il Teorema di identità si giunge alla contraddizione che $f(z) = f(z_0)$ $\forall z \in D$.

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x, \qquad -2 < a < 2.$$

[punteggio 6]

Posto $f(z) = \mathrm{e}^{(1-a)\log z}/(1+z^2)^2$, avendo assunto per il logaritmo il ramo

$$\log z = \ln r + \mathrm{i}\theta, \qquad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

si osservi che f ha poli doppi in $z = \pm\mathrm{i}$ e una linea di diramazione coincidente con il semiasse reale positivo. Si integri f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove $\lambda_1(x) = x + \mathrm{i}0$, $r \le x \le R$, $\gamma_R(\theta) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, $\lambda_2(x) = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, $R \ge x \ge r$, e $\gamma_r(\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\pi \ge \theta \ge 0$. Per $R > 1$ e $r < 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\,\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\log z}/(z+\mathrm{i})^2}{(z-\mathrm{i})^2} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{e}^{(1-a)\log z}}{(z+\mathrm{i})^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \frac{\mathrm{i}a\pi}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi/2}.
\end{aligned}$$

Gli integrali sui cammini che compongono γ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)(\ln x + \mathrm{i}0)}}{((x\mathrm{e}^{\mathrm{i}0})^2+1)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\mathrm{d}x = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln x}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^r \frac{\mathrm{e}^{(1-a)(\ln x + \mathrm{i}\pi)}}{((x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^2+1)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi}\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln x}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln R}}{(R^2-1)^2}\,\pi R = \frac{\pi R^{2-a}}{(R^2-1)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \qquad a > -2,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln r}}{(1-r^2)^2}\,\pi r = \frac{\pi r^{2-a}}{(1-r^2)^2} \xrightarrow{r\to 0} 0, \qquad a < 2.$$

Prendendo i limiti $R \to \infty$ e $r \to 0$, per $-2 < a < 2$ si conclude

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{i}a\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi/2}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi}} \\
&= \frac{a\pi}{4}\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\pi/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi/2}} \\
&= \frac{a\pi/4}{\sin(a\pi/2)}.
\end{aligned}$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2012/2013 – Prof. C. Presilla

Prova B2 – 9 luglio 2013

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Sia $f \in C[a,b]$, dimostrare che per ogni reale $p > 1$ risulta

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_p \, |b-a|^{1/q} \, ,$$

dove $q > 1$ è il reale determinato dalla relazione $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

[punteggio 5]

Per ogni coppia di funzioni $f, g \in C[a,b]$ vale la disuguaglianza di Hölder

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q} ,$$

con $p > 1$ arbitrario e $q > 1$ tale che $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Con la scelta $g(x) = 1$, $\forall f \in C[a,b]$ e $\forall p > 1$ risulta

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b \mathrm{d}x \right)^{1/q} ,$$

cioé

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_p \, |b-a|^{1/q} \, , \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

La disuguaglianza di Hölder e quindi quella ricavata valgono anche nei limiti $p \to 1$, $q \to \infty$ e $p \to \infty$, $q \to 1$. Nel primo caso si ha banalmente $\|f\|_1 \leq \|f\|_1$ mentre nel secondo $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \, |b-a|$.

<u>Esercizio 2</u> Sia $F : (\ell_\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \mapsto \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x_k, \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell_\infty(\mathbb{R}).$$

Determinare la norma di F.

[punteggio 5]

Per ogni $x \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$|F(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!}\, x_k \right| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Pertanto

$$\|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|_\infty} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

D'altro canto si consideri la successione y definita da $y_k = (-1)^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Evidentemente $\|y\|_\infty = 1$, cioè $y \in \ell_\infty(\mathbb{R})$. Inoltre

$$F(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \|y\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Pertanto risulta

$$\|F\| \ge \frac{|F(y)|}{\|y\|_\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Si conclude che

$$\|F\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - 1.$$

Esercizio 3 Sia $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, continua con derivata prima continua a tratti. Dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = 0.$$

[punteggio 5]

Poiché f è continua e f' continua a tratti, vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\cos(kx)f(x)\Big|_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)\mathrm{d}x.$$

Poiché f è continua e f' continua a tratti, esistono due numeri reali M e M' tali che

$$|f(x)| \le M, \qquad |f'(x)| \le M', \qquad \forall x \in [a, b].$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x\right| &\le \left|\frac{1}{k}\cos(kb)f(b)\right| + \left|\frac{1}{k}\cos(ka)f(a)\right| + \frac{1}{k}\int_a^b \left|f'(x)\cos(kx)\right| \mathrm{d}x \\ &\le \frac{M}{k} + \frac{M}{k} + \frac{M'(b-a)}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

a) $D^4(\cos(x^2)\delta_0'')$ b) $x^3\delta_0^{(4)}$ c) $D^3(x\mathrm{e}^{-|x|})$

[punteggio 6]

---

a) Ricordando l'identità valida per ogni $h \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$h\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(0)\delta_0^{(n-k)},$$

e ponendo $h(x) = \cos(x^2)$, si ha

$$\cos(x^2)\delta_0'' = \delta_0''.$$

Pertanto

$$D^4(\cos(x^2)\delta_0'') = \delta_0^{(6)}.$$

b) Usando ancora l'identità sopra ricordata con $h(x) = x^3$, si ha

$$x^3\delta_0^{(4)} = (-1)^3\binom{4}{3}3!\delta_0^{(4-3)} = -24\delta_0'.$$

c) Osservando che $x\mathrm{e}^{-|x|}$ è una funzione continua come pure continue sono le sue derivate prima e seconda mentre la derivata terza ha una discontinuità di valore 2 nel punto $x = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
D^3(x\mathrm{e}^{-|x|}) &= D^2(\mathrm{e}^{-|x|}(1-|x|)) \\
&= D(\mathrm{e}^{-|x|}(-\operatorname{sgn}(x)(1-|x|) - \operatorname{sgn}(x))) \\
&= D(\mathrm{e}^{-|x|}(x - 2\operatorname{sgn}(x))) \\
&= \mathrm{e}^{-|x|}(-|x| + 2 + 1 - 4\delta_0) \\
&= \mathrm{e}^{-|x|}(3-|x|) - 4\delta_0.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3}, \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4}, \frac{x_4}{4} + \frac{x_5}{5}, \dots).$$

Determinare T^* e lo spettro puntuale di T. Stabilire se $z = 0$ appartiene allo spettro continuo di T.

[punteggio 6]

L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\langle T^*x, y\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (T^*x)_k \overline{y_k} \\ \langle x, Ty\rangle &= x_1 \overline{\left(\frac{y_1}{1} + \frac{y_2}{2}\right)} + x_2 \overline{\left(\frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3}\right)} + x_3 \overline{\left(\frac{y_3}{3} + \frac{y_4}{4}\right)} + \dots \\ &= x_1 \overline{y_1} + \frac{x_1 + x_2}{2} \overline{y_2} + \frac{x_2 + x_3}{3} \overline{y_3} + \frac{x_3 + x_4}{4} \overline{y_4} + \dots\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{x_3 + x_4}{4}, \frac{x_4 + x_5}{5}, \dots).$$

Studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare $\mathrm{Ker}(zI - T)$ ovvero trovare, se esistono, le soluzioni non banali dell'equazione per gli autovalori $(zI - T)x = 0$. Questa equazione implica

$$zx_k = \frac{x_k}{k} + \frac{x_{k+1}}{k+1}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

che risolta fornisce

$$x_{k+1} = \left(z - \frac{1}{k}\right)\left(z - \frac{1}{k-1}\right) \dots \left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 1)\,(k+1)!\; x_1.$$

Se $z = 0$, si ha $x_{k+1} = (-1)^k (k+1) x_1$ che evidentemente non è una successione di ℓ_2 quindi $z = 0$ non è autovalore. Se $z = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, abbiamo un autovalore degenere con infiniti autovettori associati del tipo

$$x_k = \begin{cases} a, & k = 1 \\ a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k-2}\right) \dots \left(\frac{1}{n} - 1\right) k! & 2 \le k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{C}$ arbitrario purché non nullo. Se $z \neq 0$ e $z \neq 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, si ha $\lim_{k\to\infty} |x_k| = \infty$, pertanto la corrispondente successione non appartiene a ℓ_2 e quindi z non è autovalore. In conclusione $\sigma_p(T) = \{1/n,\ n = 1, 2, \dots\}$. Poiché lo spettro $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ è chiuso, $z = 0$ che è un punto limite di $\sigma_p(T)$ deve appartenere a $\sigma(T)$. Abbiamo già stabilito che $z = 0$ non appartiene a $\sigma_p(T)$ quindi esso deve appartenere a $\sigma_c(T)$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$. Verificare che la usuale formula di inversione riproduce correttamente $f(x)$. Si ricordi l'integrale di Fresnel $\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/8}$.

[punteggio 6]

Si osservi che f è reale e pari, pertanto la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}(f)(\lambda)$ è reale e pari e può essere scritta come

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cos(\lambda x) \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\lambda x) \mathrm{d}x. \\
&= 2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(|\lambda|\, x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile $y^2 = |\lambda|\, x$, che comporta $2\sqrt{|\lambda|\, x}\;\mathrm{d}y = |\lambda|\,\mathrm{d}x$, si ricava

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \frac{4}{\sqrt{|\lambda|}} \int_0^\infty \cos(y^2)\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\lambda|}}.$$

La formula di inversione fornisce

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\lambda|}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\lambda|}} \cos(\lambda x)\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(\lambda x)\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(\lambda\, |x|)\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile $y^2 = \lambda\,|x|$, che comporta $2\sqrt{\lambda\,|x|}\;\mathrm{d}y = |x|\,\mathrm{d}\lambda$, si ricava

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{|x|}} \cos(y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$