MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 10 Maggio 2010

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Sia $a \neq 0$ reale arbitrario. Calcolare l'integrale del ramo principale di $f(z) = z^{a-1}$ lungo la circonferenza orientata positivamente $|z| = R$, con $R > 0$ arbitrario. Si determini infine il limite $a \to 0$ del risultato trovato.

[punteggio 5]

Il ramo principale di $f(z) = e^{(a-1)\log z}$ è una funzione analitica in $\{z \in \mathbb{C},\ z \neq -t,\ t \in [0, \infty)\}$. Scelta per γ la rappresentazione parametrica $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq \pi$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^{a-1} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-1)\log\gamma(\theta)} \gamma'(\theta) d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-1)(\ln R + i\theta)} iRe^{i\theta} d\theta \\
&= iRe^{(a-1)\ln R} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ia\theta} d\theta \\
&= iR^a \frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{ia} \\
&= 2\pi i R^a \frac{\sin(\pi a)}{\pi a}.
\end{aligned}$$

Si osservi che l'integrale si anulla quando $a \neq 0$ assume valori interi positivi o negativi. Come dovevamo aspettarci per $a \to 0$ si ha

$$\lim_{a \to 0} \int_\gamma z^{a-1} dz = 2\pi i = \int_\gamma z^{-1} dz.$$

Esercizio 2 Sia $f(z)$ intera. Dimostare che se $u(z) = \text{Re}(f(z)) \leq c \ \forall z \in \mathbb{C}$, allora $u(z)$ è costante in $\mathbb{C}$.

[punteggio 5]

Si ponga $g(z) = \exp(f(z))$. La funzione g è intera. Essa è anche limitata in $\mathbb{C}$ in quanto $\forall z \in \mathbb{C}$ risulta

$$|g(z)| = e^{u(z)} \leq e^c.$$

Per il teorema di Liouville, $g(z)$ è quindi costante in $\mathbb{C}$. Si conclude che anche $u(z) = \ln(|g(z)|)$ è costante in $\mathbb{C}$.

Esercizio 3 Enunciare e dimostare il teorema di Morera.

[punteggio 5]

Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ continua in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Se per ogni curva chiusa γ regolare a tratti contenuta in D risulta $\int_\gamma f(z)dz = 0$, allora f è analitica in D.

Il fatto che $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni curva chiusa γ regolare a tratti contenuta in D è equivalente a dire che f ammette in D una primitiva F. Poiché $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$, la funzione F è analitica in D e anche F', cioè f, è analitica in D.

<u>Esercizio 4</u> Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z = 0$ la funzione

$$f(z) = \frac{2z}{z^2(1+z^2)^2}$$

nelle due regioni anulari a) $0 < |z| < 1$ e b) $1 < |z| < \infty$. Infine, calcolare il residuo della funzione in $z = 0$.

[punteggio 6]

---

a) Nella regione $0 < |z| < 1$, essendo $\left|z^2\right| < 1$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{2z}{z^2(1+z^2)^2} &= -\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\frac{1}{1+z^2} \\
&= -\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}2kz^{2k-3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2(n+1)z^{2n-1} \\
&= \frac{2}{z} - 4z + 6z^3 - 8z^5 + O(z^7).
\end{aligned}$$

b) Nella regione $1 < |z| < \infty$, essendo $\left|1/z^2\right| < 1$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{2z}{z^2(1+z^2)^2} &= -\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \\
&= -\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+2)z^{-2k-5} \\
&= \frac{2}{z^5} - \frac{4}{z^7} + \frac{6}{z^9} - \frac{8}{z^{11}} + O(z^{-13})
\end{aligned}$$

Infine, dalla serie di Laurent del punto a) risulta

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2.$$

Esercizio 5 Determinare la natura di tutte le singolarità isolate della seguente funzione e calcolare il corrisponente residuo

$$f(z) = \frac{\log(1+z)}{z \sin z}.$$

Si assuma per il logaritmo il ramo principale.

[punteggio 6]

Il ramo principale di $\log(1+z)$ è una funzione analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale $\{z = -1-t,\ t \in [0,\infty)\}$. Il denominatore di $f(z)$ si annulla nei punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto f ha singolarità isolate nei punti $z = k\pi$ con $k = 0, 1, 2 \dots$. Consideriamo prima il punto singolare $z = 0$. Nell'anello $0 < |z| < 1$, f è sviluppabile in serie di Laurent e i primi termini di tale sviluppo sono

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots}{z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \dots} \\
&= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots\right)\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \dots.
\end{aligned}$$

Da questo si deduce che $z = 0$ è un polo semplice e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1.$$

Per quanto riguarda i punti singolari $z = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, si osservi che $f(z) = p(z)/q(z)$ con $p(z) = z^{-1}\log(1+z)$ e $q(z) = \sin z$. Le funzioni p e q sono analitiche in $z = k\pi$, inoltre $p(k\pi) = (k\pi)^{-1}\ln(1+k\pi) \neq 0$, $q(k\pi) = 0$ e $q'(k\pi) = (-1)^k$. Si conclude che $z = k\pi$ è un polo semplice e

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} f(z) = \frac{p(k\pi)}{q'(k\pi)} = (-1)^k \frac{\ln(1+k\pi)}{k\pi}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x}(x^2-2x+2)}dx.$$

[punteggio 6]

Si ponga

$$f(z) = \frac{(z+1)e^{-\frac{1}{2}\log z}}{z^2-2z+2},$$

assumendo per il logaritmo il ramo

$$\log z = \ln|z| + i\arg z, \qquad |z|>0, \quad 0<\arg z<2\pi.$$

La f è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale positivo e dei due poli semplici in $z=1\pm i$ dove ha residui

$$\operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) = \left.\frac{(z+1)e^{-\frac{1}{2}\log z}}{z-1+i}\right|_{z=1+i} = \frac{2+i}{2i}e^{-\frac{1}{2}(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1-i} f(z) = \left.\frac{(z+1)e^{-\frac{1}{2}\log z}}{z-1-i}\right|_{z=1-i} = \frac{2-i}{-2i}e^{-\frac{1}{2}(\ln\sqrt{2}+i\frac{7\pi}{4})}.$$

Si integri la f lungo il cammino chiuso orientato positivamente $\gamma=\lambda_1+\gamma_R+\lambda_2+\gamma_r$, dove

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x) &= x+i0, && r\le x\le R,\\
\gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, && 0\le\theta\le 2\pi,\\
\lambda_2(x) &= x-i0, && R\ge x\ge r,\\
\gamma_r(\theta) &= re^{i\theta}, && 2\pi\ge\theta\ge 0.
\end{aligned}$$

Per $r<\sqrt{2}<R$, dal teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz\\
&= 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1-i} f(z)\right]\\
&= 2\pi i\left(\frac{2+i}{2i}2^{-1/4}e^{-i\frac{\pi}{8}} - \frac{2-i}{2i}2^{-1/4}e^{-i\frac{7\pi}{8}}\right)\\
&= \pi 2^{-1/4}\left((2+i)e^{-i\frac{\pi}{8}} + (2-i)e^{i\frac{\pi}{8}}\right)\\
&= \frac{2\pi}{\sqrt[4]{2}}\left(2\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

Nel limite $r\to 0$ e $R\to\infty$ gli integrali su γ_r e γ_R si annullano,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \pi R\frac{R+1}{\sqrt{R}(R^2+2R+2)} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)dz\right| \le \pi r\frac{1-r}{\sqrt{r}(2-2r-r^2)} \xrightarrow{r\to 0} 0,$$

mentre quelli su λ_1 e λ_2 tendono entrambi all'integrale reale da calcolare

$$\int_{\lambda_1} f(z)dz = \int_r^R \frac{(xe^{i0}+1)e^{-\frac{1}{2}(\ln x + i0)}}{(xe^{i0})^2 - 2xe^{i0}) + 2} e^{i0} dx = \int_r^R \frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x^2-2x+2)} dx,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)dz = \int_R^r \frac{(xe^{i2\pi}+1)e^{-\frac{1}{2}(\ln x + i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2 - 2xe^{i2\pi} + 2} e^{i2\pi} dx = \int_r^R \frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x^2-2x+2)} dx.$$

In conclusione

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x}(x^2-2x+2)} dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \left(2\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right).$$