MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2011/2012 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 10 luglio 2012

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Dimostrare che per ogni intero n e $\forall z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ vale

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|\,.$$

[punteggio 5]

Per $n = 2$ la relazione è la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
&\le |z_1|^2 + 2\,|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2,
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $\forall w \in \mathbb{C}$ si ha $|\mathrm{Re}\, w| \le |w|$. Ragioniamo ora per induzione. Si supponga la relazione valida con $n-1$ termini

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{n-1}|$$

e dimostriamo che essa è valida anche aggiungendo un ulteriore termine z_n. Posto $z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = w$ e utilizzando la disuguaglianza triangolare risulta

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} + z_n| &= |w + z_n| \\
&\le |w| + |z_n| \\
&\le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{n-1}| + |z_n|\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 Sia A un sottoinsieme di uno spazio metrico (S,d). Dimostrare che, in generale, $\overline{A^\circ} \neq \overline{A}$ e $(\overline{A})^\circ \neq A^\circ$.

[punteggio 5]

Poiché $A^\circ \subset A$, è sempre vero che $\overline{A^\circ} \subset \overline{A}$. L'inclusione inversa in generale è falsa. Si consideri lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ con d metrica euclidea e si prenda $A = \{1\}$. Risulta

$$\overline{A} = A, \qquad A^\circ = \left(\overline{A^c}\right)^c = \emptyset,$$

quindi $\overline{A} = \{1\}$ non è contenuto in $\overline{A^\circ} = \emptyset$.
Poiché $A \subset \overline{A}$, è sempre vero che $A^\circ \subset (\overline{A})^\circ$. L'inclusione inversa in generale è falsa. Si consideri lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ con d metrica euclidea e si prenda $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Risulta

$$A^\circ = A, \qquad \overline{A} = ((A^c)^\circ)^c = \mathbb{R},$$

quindi $(\overline{A})^\circ = \mathbb{R}$ non è contenuto in $A^\circ = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Esercizio 3 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{e^{3n}} z^n, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}.$$

[punteggio 6]

---

a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^3 e^{-3n}$. Inoltre

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \frac{e^{3(n+1)}}{e^{3n}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 e^3 \xrightarrow{n \to \infty} e^3.$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = e^3.$$

b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k/k & n = k(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m \to \infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m \to \infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m \to \infty} \sup_{k:\ k(k+1) \geq m} \left\{ \left(\frac{1}{k} \right)^{1/(k(k+1))} \right\} \\ &= \lim_{m \to \infty} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

In conclusione, $R = 1$.

Esercizio 4 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma z^{3/2} \mathrm{d}z,$$

dove γ è il quadrato di vertici $\pm(R \pm \mathrm{i}R)$, $R > 0$.

[punteggio 6]

Posto $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, la funzione integranda è definita da

$$z^{3/2} = r^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\theta}, \qquad r > 0, \qquad -\pi < \theta < \pi.$$

Tale funzione è analitica su ogni cammino $\gamma_\varepsilon = \gamma - [-R - \mathrm{i}\varepsilon, -R + \mathrm{i}\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{2}{5}z^{5/2}$. Posto $\varphi(\varepsilon) = \arctan(\varepsilon/R)$, si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^{3/2} \mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} z^{3/2} \mathrm{d}z \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{5} z^{5/2} \Big|_{z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi + \varphi(\varepsilon))}}^{z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \varphi(\varepsilon))}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{5} R^{5/2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{2}(\pi - \varphi(\varepsilon))} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{2}(-\pi + \varphi(\varepsilon))} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{i}\frac{4}{5} R^{5/2} \cos\left(\frac{5}{2}\varphi(\varepsilon) \right) \\
&= \mathrm{i}\frac{4}{5} R^{5/2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Ciascuna delle seguenti funzioni (si consideri il ramo principale per quelle polidrome) ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo:

$$\text{a)}\ \frac{\sqrt{z}}{z}, \qquad \text{b)}\ \frac{z}{1-\cos z}, \qquad \text{c)}\ (z^3+3)\exp(z^{-1}).$$

[punteggio 6]

---

a) Indipendentemente dal ramo scelto, la funzione polidroma

$$\frac{\sqrt{z}}{z} = z^{-1/2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\log z}$$

ha in $z = 0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione). Non esiste pertanto una regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

b) La funzione $1 - \cos z$ è intera e in $z = 0$ ha uno zero doppio isolato:

$$\begin{aligned} 1-\cos z &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ &= \frac{z^2}{2!}\left(1 - \frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \dots\right). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione $z/(1-\cos z)$ ha in $z = 0$ un polo semplice. In una opportuna regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{z}{1-\cos z} &= \frac{2!}{z}\frac{1}{1+\left(-\frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \dots\right)} \\ &= \frac{2!}{z}\left[1 - \left(-\frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \dots\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(-\frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \dots\right)^2 + \dots\right] \\ &= \frac{2!}{z} + \frac{(2!)^2}{4!}z + O\left(z^3\right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z}{1-\cos z} = 2.$$

c) In questo caso per $0 < |z| < \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned} \left(z^3+3\right)\mathrm{e}^{1/z} &= \left(z^3+3\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k+3} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{k!}z^{-k} \\ &= z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+3)!} + \frac{3}{n!}\right)z^{-n}. \end{aligned}$$

Quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale di $\left(z^3+3\right)\mathrm{e}^{1/z}$ e si ha

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^3+3\right)\mathrm{e}^{1/z} = \frac{1}{(1+3)!} + \frac{3}{1!} = \frac{1}{24} + 3 = \frac{73}{24}.$$

Esercizio 6 Siano $f(z)$ una funzione con un polo semplice in z_0 e $\gamma_r^{\pm}$ le due semicirconferenze definite da $\gamma_r^{\pm}(\theta) = z_0 + r\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq 0$, dimostrare che

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r^{\pm}} f(z)\mathrm{d}z = \pm\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

[punteggio 5]

Poiché f ha un polo semplice in z_0, allora $\exists R > 0$ tale che, per $0 < |z - z_0| < R$, si ha

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + g(z),$$

con g analitica nella palla $B(z_0, R)$. Per ogni $r < R$ si ha quindi

$$\int_{\gamma_r^{\pm}} f(z)\mathrm{d}z = b_1 \int_{\gamma_r^{\pm}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{\gamma_r^{\pm}} g(z)\mathrm{d}z = \pm\pi\mathrm{i}b_1 + \int_{\gamma_r^{\pm}} g(z)\mathrm{d}z.$$

Il primo termine indipendente da r è proprio $\pm\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z)$, mentre il secondo si annulla nel limite $r \to 0$. Infatti, scelto $r_0 < R$, la funzione $|g|$ è continua in $\overline{B}(z_0, r_0)$ e quindi $\exists M > 0$ tale che $|g(z)| \leq M$ $\forall z \in \overline{B}(z_0, r_0)$. Segue che $\forall r \leq r_0$ vale la disuguaglianza

$$\left| \int_{\gamma_r^{\pm}} g(z)\mathrm{d}z \right| \leq \pi r M$$

e quindi $\int_{\gamma_r^{\pm}} g(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{r\to 0} 0$.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2011/2012 – Prof. C. Presilla

Prova B2 – 10 luglio 2012

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale normato $(\ell_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ si consideri la successione di vettori

$$v^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-ka} e^{(k)}, \qquad a > 0,$$

dove $(e^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ è la base canonica definita da $e_j^{(k)} = \delta_{k,j}$. Dimostrare che $(v^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy.

[punteggio 5]

Dobbiamo mostrare che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ intero tale che $\left\| v^{(n)} - v^{(m)} \right\|_2 < \varepsilon$ $\forall n, m > N$. Presi due interi n e m con $n > m$, si ha

$$\begin{aligned}
\left\| v^{(n)} - v^{(m)} \right\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \mathrm{e}^{-ka} e^{(k)} \right\|_2^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n} \mathrm{e}^{-ka} e_j^{(k)} \right|^2 \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} \mathrm{e}^{-2ka} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-2a}\right)^k - \sum_{k=0}^{m} \left(\mathrm{e}^{-2a}\right)^k \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2a(m+1)} - \mathrm{e}^{-2a(n+1)}}{1 - \mathrm{e}^{-2a}} \\
&< \frac{\mathrm{e}^{-2a(m+1)}}{1 - \mathrm{e}^{-2a}}.
\end{aligned}$$

Scelto arbitrariamente $\varepsilon > 0$, risulta $\left\| v^{(n)} - v^{(m)} \right\|_2^2 < \varepsilon^2$ se

$$\mathrm{e}^{-2a(m+1)} < \varepsilon^2 \left(1 - \mathrm{e}^{-2a}\right),$$

ovvero se

$$m + 1 > -\frac{1}{a} \ln \varepsilon - \frac{1}{2a} \ln \left(1 - \mathrm{e}^{-2a}\right).$$

Posto quindi

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor -\frac{1}{a} \ln \varepsilon - \frac{1}{2a} \ln \left(1 - \mathrm{e}^{-2a}\right) \right\rfloor - 1,$$

si ha che $\forall n, m > N(\varepsilon)$ risulta $\left\| v^{(n)} - v^{(m)} \right\|_2 < \varepsilon$.
Alternativamente, si ricordi che una successione convergente è di Cauchy e si dimostri che la successione $(v^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ converge a $v = (\mathrm{e}^{-a}, \mathrm{e}^{-2a}, \mathrm{e}^{-3a}, \dots)$. Risulta

$$\left\| v^{(n)} - v \right\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2ka} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

in quanto la serie numerica che appare nella precedente espressione è il resto n-esimo della serie geometrica di ragione $\mathrm{e}^{-2a} < 1$.

Esercizio 2 Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se F è un funzionale lineare continuo nello spazio vettoriale normato indicato.

a) $F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \qquad (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$

b) $F(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{4+|x|^{1/3}} \mathrm{d}x \qquad (C_{5/4}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{5/4})$

c) $F(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \qquad (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

d) $F(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+1)}{5+(x-3)^2} \mathrm{d}x \qquad (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

e) $F(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\log(7+x^8)} \mathrm{d}x \qquad (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

f) $F(f) = \displaystyle\int_3^8 (f(x)+1) \mathrm{d}x \qquad (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

[punteggio 6]

a) No. Per $x = (1, 1, 1, \dots)$ risulta $F(x) = \infty$.
b) Si. La linearità è ovvia, la limitatezza si dimostra usando la disuguaglianza di Hölder

$$|F(f)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)}{4+|x|^{1/3}} \right| \mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{5/4} \right)^{4/5} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{4+|x|^{1/3}} \right|^5 \mathrm{d}x \right)^{1/5}$$

c) Si. La linearità è ovvia e la limitatezza pure

$$|F(f)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \mathrm{e}^{-x^2} \right| \mathrm{d}x \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$$

d) Si. Stesso ragionamento del caso c).
e) No. Per $f(x) = 1/(1+|x|^{1/2})$ l'integrale diverge.
f) No. Per $f(x) = 0$ risulta $F(f) \neq 0$.

Esercizio 3 Sia W un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert separabile $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dimostrare che ogni vettore $v \in V$ può essere univocamente decomposto come

$$v = w + z, \qquad w \in W, \quad z \in W^{\perp}.$$

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 95

Esercizio 4 Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

a) $D^4(x\mathrm{e}^x\delta_0'')$ b) $D^7(x^3\delta_0^{(5)})$ c) $D^2(|\sin x|)$

[punteggio 6]

---

a) Ricordando l'identità valida per ogni $h \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$h\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(0)\delta_0^{(n-k)},$$

e ponendo $h(x) = x\mathrm{e}^x$, si ha

$$x\mathrm{e}^x\delta_0'' = -2\delta_0' + 2\delta_0.$$

Pertanto

$$D^4(x\mathrm{e}^x\delta_0'') = D^3(-2\delta_0' + 2\delta_0) = -2\delta_0^{(5)} + 2\delta_0^{(4)}.$$

b) Usando ancora l'identità sopra ricordata con $h(x) = x^3$, si ha

$$x^3\delta_0^{(5)} = (-1)^3\binom{5}{3}3!\delta_0'' = -60\delta_0''.$$

Pertanto

$$D^7(x^3\delta_0^{(5)}) = D^7(-60\delta_0'') = -60\delta_0^{(9)}$$

c) Osservando che $|\sin x| = \operatorname{sgn}(\sin x)\sin x$ è una funzione continua mentre la sua derivata prima $\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x$ ha discontinuità di valore 2 nei punti $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{aligned}
D^2(|\sin x|) &= D^2(\varphi_{|\sin x|}) \\
&= D(D(\varphi_{\operatorname{sgn}(\sin x)\sin x})) \\
&= D(\varphi_{\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}) \\
&= \varphi_{-\operatorname{sgn}(\sin x)\sin x} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\delta_{k\pi} \\
&= -|\sin x| + \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\delta_{k\pi}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = x^{-1}\sin x$ e disegnare accuratamente $\mathcal{F}(f)(\lambda)$. Si osservi che $f \notin L_1(\mathbb{R})$, pertanto l'integrale di Fourier va valutato nel senso di valore principale. Verificare che la usuale formula di inversione riproduce correttamente $f(x)$. Si ricordi l'integrale notevole $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1}\sin x \; \mathrm{d}x = \pi$.

[punteggio 5]

A causa della divergenza in $x = 0$, definiamo la trasformata di Fourier di $f(x)$ come

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\lambda) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\lambda)x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+\lambda)x}}{2\mathrm{i}x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\operatorname{sgn}(1-\lambda)+\operatorname{sgn}(1+\lambda)\right)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|t|\geq\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'altro canto sappiamo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|t|\geq\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|t|\geq\varepsilon}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t + \mathrm{i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|t|\geq\varepsilon}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = 0+\mathrm{i}\pi,$$

che ci permette di concludere

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}(1-\lambda)+\operatorname{sgn}(1+\lambda)\right) = \pi\chi_{[-1,1]}(x),$$

dove $\chi_A(x)$ è la funzione caratteristica dell'insieme A.
La formula di inversione fornisce

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\\ &= \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{\mathrm{i}x}\right|_{\lambda=-1}^{\lambda=1}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}x}\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Esercizio 6 Sia T l'operatore lineare in $(C[0,2\pi];\mathbb{C},\|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = \sin(x)f(x)$$

Determinare lo spettro di T, l'aggiunto T^* e la norma $\|T\|$.

[punteggio 6]

Si studi l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI-T)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI-T)f = 0$ è soddisfatta per $f \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$ solo da $f = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)f = 0$ implica

$$(z - \sin(x))f(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,2\pi]$$

- Se $z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, il fattore $z-\sin(x)$ non si annulla mai per $x \in [0,2\pi]$ e quindi $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z \in [-1,1]$, il fattore $z - \sin(x)$ si annulla nei punti discreti $x_z = \arcsin z$. Per $x \neq x_z$ si ha $f(x) = 0$ e dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.

Si studi ora la suriettività di $zI - T$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ran}(zI - T)$ coincide con $(C[0,2\pi];\mathbb{C})$ ovvero se $\forall h \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$ esiste $f \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$ tale che $(zI - T)f = h$. Affinchè ciò accada deve essere

$$f(x) = \frac{h(x)}{z - \sin(x)} \qquad \forall x \in [0,2\pi]$$

- Se $z \in [-1,1]$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$ la f diverge in x_z e quindi risulta non continua. In tal caso $zI - T$ è non suriettivo ma, per quanto visto in precedenza, iniettivo, cioè $z \in \sigma_c(T)$.
- Se $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, la funzione f, in quanto rapporto di funzioni continue con la funzione a denominatore mai nulla, è continua in $[0,2\pi]$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.

Riepilogando, $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma_c(T) = [-1,1]$, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$.
L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*f, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ $\forall f, g \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$. Assumendo l'usuale prodotto scalare, si ha

$$\langle T^*f, g\rangle = \int_0^{2\pi} (T^*f)(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,$$
$$\langle f, Tg\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{\sin(x)g(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Dall'arbitrarietà di f e g segue che $(T^*f)(x) = \sin(x)f(x)$ cioè T è autoaggiunto.
Per ogni $f \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tf\|_u = \sup_{x\in[0,2\pi]} |\sin(x)f(x)| \le \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = \|f\|_u$$

e quindi

$$\|T\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|_u}{\|f\|_u} \le 1.$$

Poiché $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$ e $\sigma(T) = [-1,1]$, deve necessariamente risultare $\|T\| \ge 1$. Alternativamente, si osservi che per $f(x) = 1$ si ha $\|f\|_u = \|Tf\|_u = 1$ e quindi $\|T\| \ge 1$. Si conclude che $\|T\| = 1$.