MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova A5 – 12 febbraio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Siano n e k due interi positivi e $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = 1$. Calcolare al variare di k la somma

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} z^{jk}.$$

[punteggio 5]

Si ponga $w = z^k$. Se $k = np$ con $p = 1, 2, 3, \ldots$, allora $w = 1$ e quindi

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} w^j = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n.$$

Se invece k non è un multiplo intero di n allora $w \neq 1$ e quindi

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} w^j = \frac{1 - w^n}{1 - w} = \frac{1 - 1}{1 - w} = 0.$$

In conclusione

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} z^{jk} = \begin{cases} n & k = np, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2\pi^n[(1-(-1)^n)/2]z^n, \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{2+\mathrm{i}}\pi^n z^n.$$

[punteggio 5]

1. Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} n^2\pi^n & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{|a_n|^{1/n}\right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m:\ n \text{ pari}} \left\{n^{2/n}\pi\right\} \\ &= \pi \lim_{m\to\infty} n_m^{2/n_m} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

dove $n_m = m$ se m è dispari e $n_m = m+1$ se m è pari. In conclusione, $R = 1/\pi$.

2. Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^{2+\mathrm{i}}\pi^n = n^2\pi^n e^{\mathrm{i}\ln n}$ e si ha

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^2\pi^n}{(n+1)^2\pi^{n+1}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}.$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/\pi$.

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di $\arccos z$ e il valore della sua derivata in tale dominio.

[punteggio 6]

Posto $\arccos z = w$, si ha $z = \cos w = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})/2$ ovvero

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}\right)^2 - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 1 = 0,$$

la cui soluzione è convenzionalmente scritta come $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \mathrm{i}\sqrt{1-z^2}$. Con tale scelta infatti, assumendo per la radice il ramo principale, questa soluzione, e quindi la funzione $\arccos z$, risultano sviluppabili in serie di Taylor intorno a $z = 0$. Con la scelta $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \sqrt{z^2-1}$, questo sarebbe possibile solo per rami non principali della radice. In conclusione,

$$\arccos z = -\mathrm{i}\log\left(z + \mathrm{i}\sqrt{1-z^2}\right).$$

Il ramo principale di tale funzione è definito prendendo i rami principali della radice e del logaritmo. Il ramo principale di $\sqrt{1-z^2} = \exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$ è una funzione analitica ovunque in $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti z tali che $1 - z^2 = -u$ con $u \in [0,\infty)$. Tali punti

$$z(u) = \pm\sqrt{1+u}, \qquad u \in [0,\infty),$$

rappresentano le semirette reali $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$. Il ramo principale di $\log(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2})$ risulta non analitico nei punti che soddisfano $z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2} = -t$ con $t \in [0,\infty)$. La soluzione di questa equazione ottenuta quadrando l'espressione equivalente $\mathrm{i}\sqrt{1-z^2} = -(t+z)$ fornisce

$$z(t) = -\frac{1+t^2}{2t}, \qquad t \in (0,\infty),$$

che rappresenta la semiretta reale $(-\infty,-1]$ percorsa due volte, una volta per $t \in (0,1]$ e una volta per $t \in [1,\infty)$. Si osservi che solo i punti $z(t)$ ottenuti per $t \in [1,\infty)$ effettivamente soddisfano l'equazione di partenza in cui per la radice si considera il ramo principale. Infatti $\mathrm{i}\sqrt{1-z(t)^2} = \mathrm{i}\sqrt{-(t^2-1)^2/(4t^2)} = \mathrm{i}^2\sqrt{(t^2-1)^2/(4t^2)} \leq 0$ $\forall t \in (0,\infty)$, mentre $-(t + z(t)) = (1-t^2)/2t \leq 0$ solo per $t \in [1,\infty)$. In conclusione, il dominio di analiticità di $\arccos z$ è tutto il piano complesso ad eccezione delle semirette reali $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$. Nella regione di analiticità la derivata vale

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arccos z &= -\mathrm{i}\frac{1}{z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2}}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{-2z}{\sqrt{1-z^2}}\right)\\ &= \frac{-1}{\sqrt{z^2-1}}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia f analitica nella palla $B(z_0, R)$ e inoltre risulti $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in B(z_0, R)$. Dimostrare che

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!\, M}{R^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

[punteggio 5]

Detta γ_r la circonferenza di centro z_0 e raggio r, ad ogni ordine n e per ogni $r < R$ in virtù della analiticità di f in $B(z_0, R)$ possiamo applicare la formula integrale di Cauchy e scrivere

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Darboux e osservando che $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \{\gamma_r\}$, otteniamo

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq 2\pi r \, \frac{n!}{2\pi} \frac{\sup_{w \in \{\gamma_r\}} |f(w)|}{r^{n+1}} \leq \frac{n! M}{r^n}.$$

Poiché $r < R$ è arbitrario, possiamo infine prendere il limite $r \to R^-$.

Esercizio 5 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, determinare, fino all'ordine z^4 compreso, lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \log(\cos z).$$

Classificare la natura della singolarità di $f(z)$ in $z = 0$.

[punteggio 6]

Si osservi che $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione della singolarità isolata in $z = 0$ e del semiase di diramazione $[\pi/2, \infty)$. Usando gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < \infty,$$
$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \qquad |z| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} \log(\cos z) &= \frac{1}{z^2} \log \left[1 + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right] \\
&= \frac{1}{z^2} \left[\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{12} z^2 - \frac{1}{45} z^4 + \dots .
\end{aligned}$$

Lo sviluppo così trovato è uno sviluppo di Laurent valido nella regione $0 < |z| < \pi/2$. La funzione $f(z)$ presenta una singolarità eliminabile in $z = 0$. La funzione

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq 0 \\ -1/2 & z = 0 \end{cases}$$

risulta analitica per $|z| < \pi/2$. Lo sviluppo in serie di Laurent sopra trovato per $f(z)$ coincide con lo sviluppo in serie di Taylor per $g(z)$.

Esercizio 6 Calcolare, motivando i passaggi e disegnado accuratamente il cammino di integrazione, l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} \mathrm{d}x.$$

[punteggio 6]

La funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} = \frac{z}{(z-z_+)^2(z-z_-)^2}$$

è analitica ovunque ad eccezione dei due poli doppi in $z_\pm = -2 \pm 3\mathrm{i}$. L'integrale di f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$, dove $\lambda_R(x) = x$, $-R \le x \le R$, e $\gamma_R(\theta) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, per il teorema dei residui vale

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z) \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z-z_-)^2}\right|_{z=z_+} \\
&= 2\pi\mathrm{i} \frac{-z_+ - z_-}{(z_+-z_-)^3} \\
&= -\frac{\pi}{27}.
\end{aligned}$$

Poiché per $z \in \{\gamma_R\}$ e R grande risulta $|f(z)| \le R/(R^2-4R-13)^2$, segue

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi R^2}{(R^2-4R-13)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Prendendo il limite $R \to \infty$ dell'integrale su γ si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{27}.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova B5 – 12 febbraio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V indicato.

a) $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad V = C_1(\mathbb{R})$

b) $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \log(1+x^2)/(1+x^2) dx \qquad V = C_b(\mathbb{R})$

c) $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \qquad V = C^2[a,b]$

d) $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\, k^{-2/3} \qquad V = \ell_4$

e) $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \qquad V = \ell_1$

[punteggio 5]

---

a) No. Esistono funzioni $f \in C_1(\mathbb{R})$ non limitate. Si può scegliere, ad esempio, f come una funzione sempre nulla tranne che per dei picchi di forma triangolare centrati sugli interi positivi. Se il picco k-esimo centrato su $x = k$ è un triangolo di base $1/k^3$ e altezza $2k$ risulta $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 < \infty$.

b) Si.

c) No. Si prenda $f(x) = x$ per la quale risulta $\|f\| = 0$.

d) No. Si prenda $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ con $x_k = k^{-1/3}$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3} < \infty$$

cioè $x \in \ell_4$ ma

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\, k^{-2/3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$

e) Si.

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,1]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ sia $W = \text{span}\{x, x^3\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^2$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$.

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi il sistema di vettori x, x^3

$$u_1(x) = x,$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{4}{175}.$$

Usando il proiettore π_W

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k,$$

si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x^2, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k(x) = \frac{3}{4}x + \frac{35}{48}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{35}{48}x^3 + \frac{5}{16}x$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = -\frac{35}{48}x^3 + x^2 - \frac{5}{16}x.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^1 \left(\frac{35}{48}x^3 + \frac{5}{16}x\right)\left(-\frac{35}{48}x^3 + x^2 - \frac{5}{16}x\right) dx = 0.$$

<u>Esercizio 3</u> Sia $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ localmente integrabile e sia $\varphi_g : \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R}$

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \mathrm{d}x, \qquad f \in \mathcal{K}.$$

Dimostrare che φ_g è una distribuzione.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 119.

<u>Esercizio 4</u> La trasformata di Fourier di una funzione f

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

può essere pensata come l'azione di operatore lineare $\mathcal{F}$ dallo spazio delle funzioni $(L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ allo spazio delle funzioni $(C_0(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$. Calcolare la norma dell'operatore $\mathcal{F}$.

[punteggio 6]

$\forall f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f)\|_u &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \\ &\leq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) e^{-i\lambda x} \right| dx \\ &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f\|_1 = \|f\|_1 \end{aligned}$$

e pertanto

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{f\in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ f\neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} \leq 1.$$

D'altro canto, con la scelta

$$f(x) = \begin{cases} e^{ix} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

si ha

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{-1}^{1} e^{i(1-\lambda)x} dx = 2\,\frac{\sin(\lambda-1)}{\lambda-1}$$

e quindi

$$\frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} = \frac{\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} 2 \left|\frac{\sin(\lambda-1)}{\lambda-1}\right|}{\int_{-1}^{1} |e^{ix}|\, dx} = \frac{2}{2} = 1$$

Si conclude che $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Esercizio 5 Sia θ_+ l'operatore di traslazione a destra che agisce nello spazio di Banach complesso $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$

$$\theta_+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di θ_+. Si ricordi che $\|\theta_+\| = 1$.

[punteggio 6]

Per determinare lo spettro puntuale di θ_+ studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - \theta_+$ al variare di $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI - \theta_+)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI - \theta_+)x = 0$ è soddisfatta per $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ solo da $x = 0$ (operatore $zI - \theta_+$ iniettivo). L'equazione agli autovalori $(zI - \theta_+)x = 0$ implica

$$\begin{aligned} &zx_1 = 0, \\ &zx_k = x_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Se $z = 0$ le equazioni per $k \geq 2$ forniscono l'unica soluzione $x = 0$. Se $z \neq 0$, dalla prima equazione si ha $x_1 = 0$, che usata nell'equazione per $k = 2$ fornisce $x_2 = 0$, che usata nell'equazione per $k = 3$ fornisce $x_3 = 0$, e così via. Pertanto anche per $z \neq 0$ l'unica soluzione possibile è $x = 0$. In conclusione l'operatore $zI - \theta_+$ è iniettivo $\forall z \in \mathbb{C}$ e $\sigma_p(\theta_+) = \emptyset$.

Per determinare lo spettro continuo di θ_+ studiamo la suriettività di $zI - \theta_+$ al variare di $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(\theta_+) = \mathbb{C}$. Si tratta di determinare se $\mathrm{Ran}(zI - \theta_+) = \{y \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ y = (zI - \theta_+)x, \ x \in \ell_2(\mathbb{C})\}$ coincide con tutto $\ell_2(\mathbb{C})$ (operatore $zI - \theta_+$ suriettivo) oppure ne è un sottoinsieme proprio. L'equazione vettoriale $(zI - \theta_+)x = y$ equivale al sistema di infinite equazioni scalari

$$\begin{aligned} &zx_1 - 0 = y_1 \\ &zx_k - x_{k-1} = y_k, \qquad k = 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Se $z = 0$, deve essere $y_1 = 0$ quindi $zI - \theta_+$ è certamente non suriettivo. Se $z \neq 0$, deve aversi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1}{z}, \\ x_2 &= \frac{x_1 + y_2}{z} = \frac{y_1}{z^2} + \frac{y_2}{z}, \\ x_3 &= \frac{x_2 + y_3}{z} = \frac{y_1}{z^3} + \frac{y_2}{z^2} + \frac{y_3}{z}, \\ &\vdots \\ x_k &= \frac{x_{k-1} + y_k}{z} = \frac{y_1}{z^k} + \frac{y_2}{z^{k-1}} + \dots \frac{y_{k-1}}{z^2} + \frac{y_k}{z}. \end{aligned}$$

Per $0 < |z| \leq 1$, al vettore $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$ corrisponde la soluzione x con componenti $x_k = z^{-k}$ che non appartiene a $\ell_2(\mathbb{C})$. Pertanto anche in questo caso l'operatore $zI - \theta_+$ è non suriettivo. Infine, considerando che $\sigma(\theta_+) \subset \overline{B}(0, \|\theta_+\|)$ e $\|\theta_+\| = 1$, concludiamo che $\sigma_c(\theta_+) = \overline{B}(0, 1)$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $x\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}$. Si rammenti il risultato notevole $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\lambda) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}$.

[punteggio 6]

A partire dal risultato notevole

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4},$$

e utilizzando le proprietà generali della trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(x)](\lambda/a), \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

$$\mathcal{F}[f(x+b)](\lambda) = \mathcal{F}[f(x)](\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}, \qquad b \in \mathbb{R},$$

si ha

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3x^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12},$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda 2}.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[x\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) &= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) \\
&= \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}\left(-\frac{\lambda}{6} - 2\mathrm{i}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(2 - \frac{\mathrm{i}\lambda}{6}\right)\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}.
\end{aligned}$$