MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2008/2009 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 12 Giugno 2009

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Nei casi seguenti, se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola una delle proprietà della norma.

(a) $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|$;

(b) $V = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$;

(c) $V = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1}{1+|x|} dx$;

(d) $V = \ell_4$ e $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3}$;

(e) $V = \ell_1$ e $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right)^{1/3}$.

[punteggio 5]

(a) No. Ad esempio per $x = (1, 1, 1) \neq 0$ si ha $\|x\| = 0$.

(b) Sì.

(c) No. Si prenda $f(x) = 1/\log(2 + |x|)$ per la quale risulta $\|f\| = \infty$.

(d) No. Si prenda $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ con $x_k = k^{-1/3}$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3} < \infty$$

cioè $x \in \ell_4$ ma

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$

(e) Sì.

Esercizio 2 Dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$.

[punteggio 6]

Si consideri la disugualianza di Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Scelto $y_i = x_i / |x_i|$, $i = 1, \ldots, n$, si ha

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / |x_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / |x_i|^2\right)$$

Da questa, usando $x_i^2 = |x_i|^2$, segue

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) n$$

e quindi prendendo la radice quadrata risulta $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$. Alternativamente, si consideri la disugualianza di Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

con $1/p + 1/q = 1$ e $p \geq 1$. Scelto $y_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, per $p = q = 2$ si ha ancora

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} n^{1/2}$$

D'altro canto

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i \neq j} |x_i|\,|x_j| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

e quindi $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$.

Esercizio 3 Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti funzioni appartengono a $C_1(\mathbb{R})$

(a) $|x|\, e^{-\alpha |x|^{1/3}}$ (b) $\dfrac{x^3 - \log(1+x^4)}{(x^2+1)^\alpha}$ (c) $\dfrac{x}{(x^2+1)(\log(1+x^2))^\alpha}$

[punteggio 6]

(a) $\alpha > 0$ (b) $\alpha > 2$ (c) mai

Per il punto (c), si osservi che f è continua in $x = 0$ per $\alpha < 0$. D'altro canto

$$\frac{x}{(x^2+1)(\log(1+x^2))^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\log(1+x^2))^{1-\alpha}$$

quindi $|f|$ è integrabile su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 1$. In conclusione, non esite un valore di α per cui $f \in C_1(\mathbb{R})$.

Esercizio 4 Si consideri l'insieme chiuso e limitato di ℓ_∞

$$B = \{x \in \ell_\infty : \ \|x\|_\infty \leq 1\}$$

e si mostri, fornendo un esempio esplicito, che B non è sequenzialmente compatto, ovvero che è possibile trovare una successione in B che non ammette una sottosuccessione convergente.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 52.

Esercizio 5 Dimostrare che ℓ_f è denso in $(\ell_0, \|\cdot\|_\infty)$.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 65.

Esercizio 6 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,\pi]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ sia $W = \text{span}\{1, \sin x\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$

[punteggio 6]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{1, \sin x\}$:

$$u_1(x) = 1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\pi 1^2 dx = \pi$$

$$u_2(x) = \sin x - \frac{\langle \sin x, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^\pi \left(\sin x - \frac{2}{\pi}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}$$

Usando il proiettore π_W si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k = \frac{\langle x, 1\rangle}{\pi} + \frac{\langle x, (\sin x - 2/\pi)\rangle}{\pi/2 - 4/\pi}$$

Osservando che $\langle x, 1\rangle = \pi^2/2$ mentre $\langle x, \sin x\rangle = \pi$, si ricava

$$w(x) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x - \frac{\pi}{2}.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^\pi \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 0.$$