Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 3/A

Cesi/Presilla – A.A. 2007–08

Nome	SOLUZIONI
Cognome	

Il voto dello scritto sostituisce gli esoneri	1	2

Devo verbalizzare il primo modulo da 4 crediti?	S	N

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{3n}}\, z^n$$

$$(b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n \qquad a_n = \begin{cases} 3^n & \text{se } n \text{ è primo} \\ 5^n & \text{se } n \text{ non è primo} \end{cases}$$

Risp: (a) e^2. (b) $1/5$.

(2) (4 pt). Trovare una successione di funzioni intere f_n tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ coverge nel semipiano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ (e diverge sul complementare).

Risp: Ad esempio $f_n(z) = e^{inz}$.

(3) (4 pt). Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $z^i = 1 + i$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Quante di queste soluzioni appartengono all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le e^{10\pi}\}$?

Risp: Le soluzioni sono

$$z_k = \exp\big[\pi/4 + 2k\pi - i \log 2/2\big] \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Le soluzioni che appartengono all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le e^{10\pi}\}$ sono 4: z_1, z_2, z_3, z_4.

(4) (5 pt). Determinare la parte singolare di f nell'intorno del punto $z = 0$.

$$f(z) := \frac{\sin z}{z\,(\cosh z - 1)\,\log(1+z)}$$

Risp:

$$f = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{3z} + \cdots$$

(5) (6 pt). Calcolare gli integrali

$$(a)\quad \int_\gamma \frac{e^{\pi z}\, dz}{z\,(z^2+9)} \qquad \gamma(t) := 2 + 3e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$(b)\quad \int_\gamma \cos(z)\, e^{1/z^2}\, dz \qquad \gamma(t) := 1 + 5e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$$

Risp: (a) $2i\pi/9$. (b) L'integrale è nullo perchè la serie di Laurent dell'integrando contiene solo potenze pari di z.

(6) (4 pt). Enunciare e dimostrare il teorema del massimo modulo.

(7) (4 pt). *ATTENZIONE: Questo esercizio NON deve essere svolto da chi verbalizza il primo modulo da 4 crediti.*[1] Calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(3x)}{x^2+1}\, dx$$

Risp: $\pi/(2e^3)$.

[1] Il totale verrà normalizzato a 33

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 3/B

Cesi/Presilla – A.A. 2007–08

Nome	
Cognome	

Il voto dello scritto sostituisce gli esoneri	1	2

Devo verbalizzare il primo modulo da 4 crediti?	S	N

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt). Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola almeno una delle proprietà della norma.

(a) $V=\mathbb{R}^3$ e $\|x\|=|x_1-x_2|+|x_2-x_3|$
(b) $V=\ell_4$ e $\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^3\right]^{1/3}$
(c) $V=C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\|=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$
(d) $V=C_2(\mathbb{R})$ e $\|f\|=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx$

Risp: Nessuna delle 4 è una norma.

(2) (4 pt). Sia W un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert separabile[2] V. Dato $v\in V$, sia $w:=\pi_W v$ la proiezione ortogonale di v su W. Dimostrare che w è, fra tutti gli elementi di W, il più vicino a v (rispetto alla distanza associata alla norma).

Soluzione. Grazie al teorema della proiezione posso scrivere v come

$$v=w+z \qquad w\in W,\, z\in W^{\perp}.$$

Sia ora w' un elemento arbitrario di W. La distanza (al quadrato) di v da w' è data da

$$\begin{aligned}\|v-w'\|^2&=\|z+w-w'\|^2\\&=\langle z+(w-w'),z+(w-w')\rangle\\&=\|z\|^2+\|w-w'\|^2+\langle z,w-w'\rangle+\langle w-w',z\rangle\\&=\|z\|^2+\|w-w'\|^2=\|v-w\|^2+\|w-w'\|^2.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\|v-w'\|^2\geq\|v-w\|^2 \qquad \forall w'\in W,$$

e che si può avere l'uguaglianza solo se $w=w'$.

(3) (5 pt). Nello spazio vettoriale $P[0,\infty)$ (i polinomi su $[0,\infty)$) consideriamo il prodotto scalare $\langle f,g\rangle:=\int_0^\infty f(x)g(x)\,e^{-x}\,dx$. Sia $W:=\operatorname{span}\{1,x^2\}$. Determinare la proiezione ortogonale $\pi_W(x^n)$, in cui n è un intero positivo arbitrario. (Ricorda: $\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx=n!$).

Risp:

$$\pi_W(x^n)=n!+\frac{x^2-2}{20}\left[(n+2)!-2\,n!\right]=n!\left[1+(x^2-2)\frac{n^2+3n}{20}\right]$$

(4) (4 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$$(a)\;\; D^4\big(\cos x\, D^4(|x|)\big) \qquad\qquad (b)\;\; D\lfloor e^{x^2}\rfloor$$

Risp: (a) $2(\delta_0^{(6)}-\delta_0^{(4)})$. (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{\sqrt{\log k}}$.

(5) (4 pt). Dimostrare la *prima formula dei risolventi*: sia $T\in\mathcal{L}(V)$, dove V è uno spazio di Banach. Se $\alpha,\beta\in\rho(T)$ allora vale

$$R_\alpha(T)-R_\beta(T)=(\beta-\alpha)\,R_\alpha(T)R_\beta(T).$$

[2] questa ipotesi in realtà non è necessaria

Soluzione. Poichè $R_z(T) = (zI - T)^{-1}$, e quindi $R_z(T)\,(zI - T) = I$, posso scrivere

$$\begin{aligned} R_\alpha(T) - R_\beta(T) &= R_\alpha(T)\,(\beta I - T)\,R_\beta(T) - R_\alpha(T)\,(\alpha I - T)\,R_\beta(T) \\ &= \beta\,R_\alpha(T)\,R_\beta(T) - R_\alpha(T)\,T\,R_\beta(T) - \alpha\,R_\alpha(T)\,R_\beta(T) + R_\alpha(T)\,T\,R_\beta(T) \\ &= (\beta - \alpha)R_\alpha(T)R_\beta(T)\,. \end{aligned}$$

(6) (6 pt). Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \Big(x_2, \frac{x_2}{2}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_6}{5}, \frac{x_6}{6}, \ldots\Big)$$

(a) Determinare $\|T\|$.
(b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$.
(c) Trovare gli autovalori di T. Per ogni autovalore trovare un autovettore corrispondente.

Risposta. (a) $\|T\| = \sqrt{5/4}$.

(b) $T^*x = \big(0, x_1 + \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4}, 0, \frac{x_5}{5} + \frac{x_6}{6}, \ldots\big)$.

(c) L'insieme degli autovalori è $\{0\} \cup \{1/2k : k = 1, 2, 3, \ldots\}$. Un autovettore corrispondente all'autovalore 0 è $x = (1, 0, 0, 0, \ldots)$. Un autovettore corrispondente all'autovalore $1/2k$ è il vettore $x \in \ell_2$ che ha tutte le componenti nulle tranne la $(2k-1)$-esima e la $(2k)$-esima, e vale

$$x_{2k-1} = \frac{2k}{2k-1} x_{2k}\,.$$

(7) (4 pt). *ATTENZIONE: Questo esercizio NON deve essere svolto da chi verbalizza l'intero corso da 8 crediti.*[3]

(a) Sviluppare in serie di Fourier. la funzione $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, definita come

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Scrivere, oltre alla formula completa, lo sviluppo esplicito di f fino a $k = 7$, vale a dire

$$\begin{aligned} f(x) \sim \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \cdots + a_7 \cos(7x) \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + \cdots + b_7 \sin(7x) + \cdots \end{aligned}$$

(b) Utilizzando il risultato precedente, calcolare $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

Risp:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)x] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{2}{3\pi} \cos(3x) + \frac{2}{5\pi} \cos(5x) - \frac{2}{7\pi} \cos(7x) + \cdots \end{aligned}$$

[3] Il totale verrà normalizzato a 33