MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 13 Aprile 2010

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare le seguenti quantità

a) $\operatorname{Arg}(\operatorname{cis}(17\pi/5))$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{19}(1+i)^k$, c) $\displaystyle\left|\frac{ie^{-1-5i}(1+i)^3}{1+3i}\right|$.

[punteggio 6]

a) Poiché $17\pi/5 = 4\pi - 3\pi/5$ con $-3\pi/5 \in (-\pi, \pi]$ si ha

$$\operatorname{Arg}(\operatorname{cis}(17\pi/5)) = -3\pi/5.$$

b) Osservando che per $z \neq 1$ vale $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{19}(1+i)^k &= -1 + \sum_{k=0}^{19}(1+i)^k \\
&= -1 + \frac{1-(1+i)^{20}}{1-(1+i)} \\
&= -1 + \frac{1-(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{20}}{-i} \\
&= -1 + \frac{1-2^{10}e^{i5\pi}}{-i} \\
&= -1 + i(1+2^{10}) \\
&= -1 + i1025.
\end{aligned}$$

c) Applicando ripetutamente $|zw| = |z|\,|w|$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|\frac{ie^{-1-5i}(1+i)^3}{1+3i}\right| &= \frac{|i|\,\left|e^{-1-5i}\right|\,|1+i|^3}{|1+3i|} \\
&= \frac{1e^{-1}2^{3/2}}{\sqrt{10}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}e}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 Dimostrare la seguente affermazione, se vera, o fornire un controesempio, se falsa. Sia A un sottoinsieme dello spazio metrico (S, d), allora $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.

[punteggio 6]

L'affermazione è vera. Per dimostrarlo facciamo vedere che $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} \overline{A}$ e $\operatorname{diam} A \geq \operatorname{diam} \overline{A}$. La prima disugualianza segue banalmente dalla definizione di diametro e dal fatto che $A \subset \overline{A}$. Per la seconda, si considerino due arbitrari punti $x, y \in \overline{A}$. Poiché $\overline{A}$ coincide con l'insieme dei punti limite di A, esistono due successioni (x_n) e (y_n) in A convergenti rispettivamente a x e y. Segue che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ intero tale che $d(x_n, x) < \varepsilon$ e $d(y_n, y) < \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Sia $n \geq N$, per la disgualianza triangolare della metrica si ha

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) < \varepsilon + d(x_n, y_n) + \varepsilon,$$

e quindi

$$\operatorname{diam} A = \sup_{w,z \in A} d(w, z) \geq d(x_n, y_n) \geq d(x, y) - 2\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di $x, y \in \overline{A}$ segue $\operatorname{diam} A \geq \operatorname{diam} \overline{A} - 2\varepsilon$ e dall'arbitrarietà di ε segue $\operatorname{diam} A \geq \operatorname{diam} \overline{A}$.

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di $f(z) = \sqrt{4 + z^4}$. Illustrare graficamente il risultato.

[punteggio 5]

Si ha

$$f(z) = \sqrt{4 + z^4} = \exp(\frac{1}{2}\log(4 + z^4))$$

dove per il logaritmo si intende il ramo principale. Tale funzione è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti del semiasse di diramazione di $\log(4 + z^4)$ determinato dall'equazione

$$4 + z^4 = -t, \qquad t \in [0, \infty).$$

Tali punti sono

$$\begin{aligned} z(t) &= (-4 - t)^{1/4} = ((4 + t)e^{i\pi})^{1/4} \\ &= (4 + t)^{1/4} e^{i(\pi+2k\pi)/4}, \qquad t \in [0, \infty), \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Si tratta delle semirette che bisecano i quattro quadranti a partire dalla distanza $\sqrt{2}$ dall'origine.

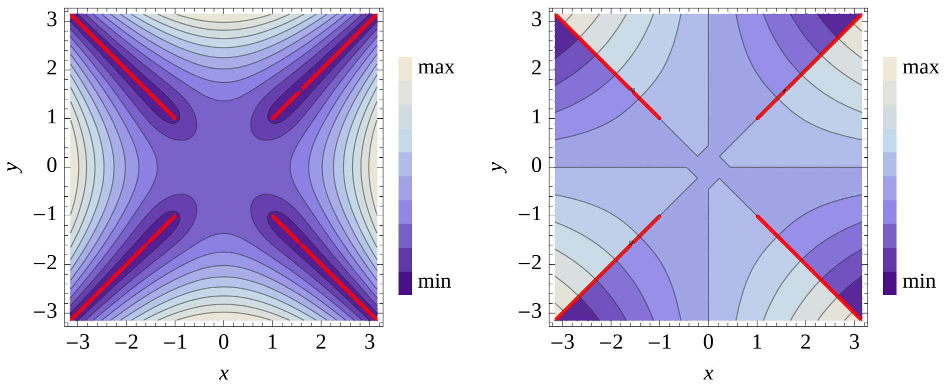

Figura 1: Grafici di livello della parte reale (sinistra) e della parte immaginaria (destra) del ramo principale di $\sqrt{4 + (x + iy)^4}$.

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f(z) = (3z^2 - \overline{z}^2)\overline{z}/2$. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità di f.

[punteggio 5]

In quanto composizione di funzioni continue in tutto $\mathbb{C}$, f è continua in tutto $\mathbb{C}$. Per studiare la derivabilità, si osservi che, posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x + iy) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2 y),$$

pertanto $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = x^3 + 3xy^2$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = y^3 + 3x^2 y$. Le funzioni u e v sono derivabili in tutto $\mathbb{R}^2$ con derivate

$$\begin{aligned} &u_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2, \qquad u_y(x, y) = 6xy, \\ &v_x(x, y) = 6xy, \qquad v_y(x, y) = 3y^2 + 3x^2, \end{aligned}$$

continue in tutto $\mathbb{R}^2$. Le equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, sono quindi

$$\begin{aligned} &3x^2 + 3y^2 = 3x^2 + 3y^2, \\ &6xy = -6xy. \end{aligned}$$

La prima equazione è sempre soddisfatta, la seconda solo se $x = 0$ oppure $y = 0$. Segue che f è derivabile solo nei punti degli assi coordinati. In nessuno di tali punti però la f è analitica. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ la boccia $B(z, \varepsilon)$, con z reale o immaginario puro, contiene punti w tali che $\operatorname{Re} w \neq 0$ e $\operatorname{Im} w \neq 0$ in cui la f è non derivabile.

Esercizio 5 Enunciare e dimostrare il criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ dove (f_n) è una successione di funzioni dallo spazio metrico (S, d) a valori in $\mathbb{C}$.

[punteggio 5]

Sia (f_n) una successione di funzioni $f_n : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$. Se per ogni intero n $\exists M_n > 0$ con le proprietà $|f_n(x)| \leq M_n \; \forall x \in S$ e $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente.

Si ponga $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$. Per $m > n$ e $\forall x \in S$ risulta

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n} M_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Poiché $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = M \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = M - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k = 0.$$

Questo implica che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon \; \forall n \geq N$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$ intero tale che

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \tag{1}$$

$\forall m, n \geq N$ e $\forall x \in S$. In altre parole, per ogni fissato $x \in S$ la successione $(s_n(x))$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$. Per la completezza di $\mathbb{C}$ tale successione è convergente. Si ponga $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$. Risulta così definita la funzione limite $s : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$. Prendendo il limite $m \to \infty$ nella (1), si ottiene infine che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$ intero tale che $|s(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon \; \forall n \geq N$ e $\forall x \in S$, cioè la successione di funzioni $(s_n(x))$ converge uniformemente a $s(x)$ in S. $\square$

Esercizio 6 Determinare, se esistono, i seguenti limiti giustificando la risposta

$$\text{a)}\ \lim_{z\to 1+i} \frac{z^2-2i}{z^2-2z+2}, \qquad \text{b)}\ \lim_{z\to -3} \frac{\sqrt{z}}{z}, \qquad \text{c)}\ \lim_{z\to\infty} (\sqrt{z+2i}-\sqrt{z+i}).$$

Posto $z = re^{i\theta}$ con $r \geq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, si assuma $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

[punteggio 6]

---

a) Osservando che $z^2 - 2i = 0$ ha soluzioni $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$ e $z = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = -1 - i$ mentre $z^2 - 2z + 2 = 0$ ha soluzioni $z = 1 + i$ e $z = 1 - i$, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1+i} \frac{z^2-2i}{z^2-2z+2} &= \lim_{z\to 1+i} \frac{(z-1-i)(z+1+i)}{(z-1-i)(z-1+i)} \\
&= \lim_{z\to 1+i} \frac{z+1+i}{z-1+i} \\
&= \frac{1+i+1+i}{1+i-1+i} \\
&= 1-i.
\end{aligned}$$

b) Il limite non esiste. Infatti per $z = 3e^{i(\pi-\varepsilon)}$ si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{3e^{i(\pi-\varepsilon)}}}{3e^{i(\pi-\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{3}e^{i(\pi-\varepsilon)/2}}{3e^{i(\pi-\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/2} = -\frac{i}{\sqrt{3}},$$

invece per $z = 3e^{-i(\pi-\varepsilon)}$ si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{3e^{-i(\pi-\varepsilon)}}}{3e^{-i(\pi-\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{3}e^{-i(\pi-\varepsilon)/2}}{3e^{-i(\pi-\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

c) Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{z+2i} + \sqrt{z+i}$ si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} (\sqrt{z+2i}-\sqrt{z+i}) &= \lim_{z\to\infty} \frac{(\sqrt{z+2i}-\sqrt{z+i})(\sqrt{z+2i}+\sqrt{z+i})}{\sqrt{z+2i}+\sqrt{z+i}} \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{(z+2i)-(z+i)}{\sqrt{z+2i}+\sqrt{z+i}} \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{i}{\sqrt{z+2i}+\sqrt{z+i}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$