MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2012/2013 – Prof. C. Presilla

Prova B1 – 13 Giugno 2013

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{x-a}$$

risulta modulo quadrato integrabile nell'intervallo $[0, \infty)$.

[punteggio 5]

Dobbiamo stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\|f\|_2^2 = \int_0^\infty |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{(x-a)^2} \mathrm{d}x.$$

Per $a < 0$, si ha $x - a \neq 0 \ \forall x \in [0, \infty)$, pertanto l'integrale è convergente in quanto per $x \to \infty$ si ha

$$\frac{\sin^2(ax)}{(x-a)^2} \leq \frac{1}{(x-a)^2} = O(x^{-2}).$$

Per $a \geq 0$, la funzione integranda presenta una singolarità in $x = a \in [0, \infty)$. Per determinare la natura di questa singolarità si sviluppi $\sin^2(ax)$ in serie di Taylor intorno a $x = a$

$$\begin{aligned}\sin^2(ax) = &\sin^2(a^2) + 2a \sin(a^2)\cos(a^2)(x-a) \\ &+ \frac{1}{2} 2a^2 \left(\cos^2(a^2) - \sin^2(a^2)\right)(x-a)^2 + O((x-a)^3).\end{aligned}$$

Per $a = \sqrt{n\pi}$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, si ha

$$\sin^2(ax) = a^2(x-a)^2 + O((x-a)^3),$$

pertanto la singolarità è eliminabile e l'integrale convergente (si noti che il comportamento all'infinito è come nel caso $a < 0$). Per $a \neq \sqrt{n\pi}$, essendo $\sin^2(a^2) \neq 0$, la singolarità è del tipo $(x-a)^{-2}$, cioè non integrabile. In conclusione $\|f\|_2 < \infty$ per $a < 0$ e per $a = \sqrt{n\pi}$, con $n = 0, 1, 2, \dots$.

Esercizio 2 Dimostrare che lo spazio vettoriale normato $(C_2[-1,1], \|\cdot\|_2)$ non è completo.

[punteggio 5]

Basta fornire un esempio di una successione di funzioni $f_n(x) \in C_2[-1,1]$ che sia di Cauchy ma convergente a una funzione discontinua in $[-1,1]$, vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 71, cambiando $\|\cdot\|_1$ in $\|\cdot\|_2$.

Esercizio 3 Nello spazio vettoriale $P(\mathbb{R})$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$ sia $W = \mathrm{span}\{x, x^2 + x\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^3$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$. Si ricordi che $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\mathrm{d}x = 3\sqrt{\pi}/4$

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{x, x^2 + x\}$

$$u_1(x) = x$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$u_2(x) = x^2 + x - \frac{\langle x^2 + x, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^2$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Usando il proiettore π_W si ha

$$w = \pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k$$

ovvero

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\langle x^3, x\rangle}{\sqrt{\pi}/2} x + \frac{\langle x^3, x^2\rangle}{3\sqrt{\pi}/4} x^2 \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}/4}{\sqrt{\pi}/2} x + 0 \\ &= \frac{3}{2} x. \end{aligned}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x^3 - \frac{3}{2} x.$$

Si può verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{2} x \left(x^3 - \frac{3}{2} x \right) e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{3}{2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} - \frac{9}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.$$

Esercizio 4 Determinare a quale distribuzione converge la successione di distribuzioni regolari $(\varphi_{g_n})_{n=1}^{\infty}$, dove

$$g_n(x) = n^2 \operatorname{sgn}(x) \mathrm{e}^{-n|x|}.$$

[punteggio 6]

Si osservi innanzitutto che $g_n(x)$ è una funzione continua a tratti, pertanto localmente integrabile, e quindi φ_{g_n} è una distribuzione regolare nello spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{K}$. Per ogni $f \in \mathcal{K}$, integrando due volte per parti si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_{g_n}(f) &= \int_{\mathbb{R}} g_n(x) f(x) \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{0} n^2 \mathrm{e}^{nx} f(x) \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} n^2 \mathrm{e}^{-nx} f(x) \mathrm{d}x \\
&= -n\mathrm{e}^{nx} f(x)\big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} n\mathrm{e}^{nx} f'(x) \mathrm{d}x \\
&\qquad - n\mathrm{e}^{-nx} f(x)\big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx} f'(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} n\mathrm{e}^{nx} f'(x) \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx} f'(x) \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{nx} f'(x)\big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{nx} f''(x) \mathrm{d}x \\
&\qquad - \mathrm{e}^{-nx} f'(x)\big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} f''(x) \mathrm{d}x \\
&= 2f'(0) - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{nx} f''(x) \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} f''(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Entrambi gli integrali che compaiono in quest'ultima espressione si annullano per $n \to \infty$. Si consideri, ad esempio, il secondo. Scelto arbitrariamente $\varepsilon > 0$ scriviamo

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} f''(x) \mathrm{d}x = \int_{0}^{\varepsilon} \mathrm{e}^{-nx} f''(x) \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} f''(x) \mathrm{d}x.$$

Risulta

$$\left| \int_{0}^{\varepsilon} \mathrm{e}^{-nx} f''(x) \mathrm{d}x \right| \le \left\| f'' \right\|_u \varepsilon$$

$$\left| \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} f''(x) \mathrm{d}x \right| \le \left\| f'' \right\|_u \mathrm{e}^{-n\varepsilon} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} f''(x) \mathrm{d}x \right| \le \left\| f'' \right\|_u \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si deve ammettere che tale limite non può che essere 0. Analogamente si ragiona per il primo integrale. In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{g_n}(f) = 2f'(0) = 2\delta_0(f') = -2\delta_0'(f)$$

che, per l'arbitrarietà di $f \in \mathcal{K}$, implica

$$\varphi_{g_n} \xrightarrow{\mathcal{K}^*} -2\delta_0'.$$

Alternativamente, si osservi che, come stabilito in precedenza, per ogni $f \in \mathcal{K}$ risulta

$$\varphi_{g_n}(f) = \int_{\mathbb{R}} n\mathrm{e}^{-n|x|} f'(x)\mathrm{d}x = 2\int_{\mathbb{R}} nh(nx)f'(x)\mathrm{d}x,$$

dove $h(x) = \mathrm{e}^{-|x|}/2$. Risulta $h \in C_1(\mathbb{R})$, non negativa e normalizzata $\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}x = 1$. Tanto basta per concludere che nel senso delle distribuzioni $nh(nx) \xrightarrow{n\to\infty} \delta_0$, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{g_n}(f) = 2\delta_0(f') = -2\delta_0'(f).$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (x_2, x_3 - x_1, x_4 - x_2, x_5 - x_3, x_6 - x_4, \dots).$$

Dimostrare che T è continuo e determinare T^*. Mostrare infine che gli autovalori di T sono immaginari puri di modulo non superiore a 2.

[punteggio 6]

Per dimostrare che T è continuo basta mostrare che è limitato. Sia x una generica successione di $\ell_2(\mathbb{C})$, si ha

$$\begin{aligned} \|Tx\|_2^2 &= |x_2|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} |x_{k+1} - x_{k-1}|^2 \\ &\le |x_2|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (|x_{k+1}| + |x_{k-1}|)^2 \\ &\le 4\,\|x\|_2^2 , \end{aligned}$$

che implica $\|T\| \le 2$.
L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \langle T^*x, y\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (T^*x)_k \overline{y_k} \\ \langle x, Ty\rangle &= x_1\overline{y_2} + x_2(\overline{y_3} - \overline{y_1}) + x_3(\overline{y_4} - \overline{y_2}) + x_4(\overline{y_5} - \overline{y_3}) + \dots \\ &= -x_2\overline{y_1} + (x_1 - x_3)\overline{y_2} + (x_2 - x_4)\overline{y_3} + (x_3 - x_5)\overline{y_4} + \dots \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = -(x_2, x_3 - x_1, x_4 - x_2, x_5 - x_3, x_6 - x_4, \dots).$$

Poiché $T^* = -T$, gli autovalori di T sono immaginari puri. Infatti detto $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di T con autovettore x, $Tx = \lambda x$, si ha

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = -\langle T^*x, x\rangle = -\langle x, Tx\rangle = -\langle x, \lambda x\rangle = -\overline{\lambda}\langle x, x\rangle,$$

da cui segue

$$\lambda + \overline{\lambda} = 2\,\mathrm{Re}\,\lambda = 0,$$

cioè $\lambda = ib$ con $b \in \mathbb{R}$. Infine, ricordando che $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$ e usando $\|T\| \le 2$, si ricava $|\lambda| \le 2$.
Alcuni hanno provato a dimostrare la proprietà $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ affermando che gli autovalori di T^* sono i complessi coniugati degli autovalori di T. Negli spazi infinito-dimensionali questa affermazione è falsa (si considerino, ad esempio, gli operatori θ_+ e θ_- tali che $\theta_\pm^* = \theta_\mp$). Vale invece la relazione

$$\sigma(T^*) = \{z \in \mathbb{C} : \ \overline{z} \in \sigma(T)\}$$

che si riduce a $\sigma_p(T^*) = \{z \in \mathbb{C} : \ \overline{z} \in \sigma_p(T)\}$ nel caso finito-dimensionale in cui lo spettro continuo è vuoto.

Esercizio 6 Sia $f(x) = \theta(1-x^2)$ con $x \in [-\pi, \pi]$ e dove θ è la funzione di Heaviside, $\theta(x) = 1$ per $x \geq 0$ e $\theta(x) = 0$ per $x < 0$. Sviluppare f in serie di Fourier e studiare la convergenza puntuale della serie ottenuta. Valutare infine la somma della serie $1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sin(2k)$.

[punteggio 6]

Osservando che $1 - x^2 \geq 0$ se $|x| \leq 1$, si ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < -1, \quad 1 < x \leq \pi \end{cases}$$

Poiché f è pari risulta

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

con

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(kx) \mathrm{d}x = \frac{2 \sin k}{k\pi},$$

per $k > 0$ e

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

La serie di Fourier

$$\frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin k}{k\pi} \cos(kx)$$

converge puntualmente a $f(x)$ per $x \in [-\pi, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \pi]$ mentre per $x = \pm 1$ converge a $1/2$. Ponendo $x = \pm 1$ si ha quindi

$$\frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin k}{k\pi} \cos k = \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{k\pi} = \frac{1}{2},$$

ovvero

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{k} = \frac{\pi}{2}.$$