MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2013/2014 – Prof. C. Presilla

Prova B1 – 13 giugno 2014

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Dimostrare che $(\ell_1, \|\cdot\|_1) \subset (\ell_2, \|\cdot\|_2)$. Nel caso degli spazi funzionali $(C_1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ e $(C_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ è ancora vera l'inclusione $C_1 \subset C_2$? Dimostrarla o portare un controesempio.

[punteggio 5]

Sia $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ un arbitrario vettore di $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, mostriamo che $x \in (\ell_2, \|\cdot\|_2)$, ovvero che risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty.$$

Per ipotesi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty.$$

Inoltre, poiché $\ell_1 \subset \ell_0$, $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ e quindi $\exists N$ tale che $|x_k| < 1 \; \forall k \geq N$. Risulta allora

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 &= \sum_{k=1}^{N-1} |x_k|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} |x_k|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |x_k| \times 1 \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} |x_k|^2 + \|x\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Nel caso degli spazi funzionali l'inclusione è falsa. Si consideri la funzione $f(x) = 0$ ovunque ad eccezione di triangoli di altezza k e larghezza k^{-3} centrati nei punti $x = \pm k$, $k = 1, 2, \dots$. Tale funzione è continua in $\mathbb{R}$ e risulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x &\sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x &\sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.\end{aligned}$$

pertanto $f \in (C_1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ ma $f \notin (C_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

<u>Esercizio 2</u> Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio Euclideo <u>complesso</u> e $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ un sistema ortonormale in V. Determinare, dimostrandolo, per quali coefficienti complessi α_k, $k = 1, \dots, n$ la combinazione lineare

$$S_n^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$$

approssima in modo ottimale (ha minore distanza da) il generico vettore $v \in V$.

[punteggio 5]

Scelto v arbitrario vettore di V, vogliamo determinare α_k, $k = 1, \dots, n$, in modo tale che $\|v - S_n^{\alpha}\|$ abbia il valore minimo. Poiché

$$\begin{aligned}
\|v - S_n^{\alpha}\|^2 &= \langle v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k, v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \sum_{k=1}^{n} \left(\langle v, \alpha_k u_k\rangle + \langle \alpha_k u_k, v\rangle\right) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \alpha_k u_k, \alpha_j u_j\rangle \\
&= \|v\| - \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\alpha_k}\langle v, u_k\rangle + \alpha_k \overline{\langle v, u_k\rangle}\right) + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \\
&= \|v\| + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle v, u_k\rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, u_k\rangle|^2 ,
\end{aligned}$$

la distanza tra v e S_n^{α} risulta minima se $\alpha_k = \langle v, u_k\rangle$.

Esercizio 3 Determinare in modo diretto, cioè senza appellarsi a teoremi genarali, a quale distribuzione converge nello spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{K}$ la successione di distribuzioni regolari $(\varphi_{g_n})_{n=1}^{\infty}$, dove $g_n(x) = n\mathrm{e}^{-n|x|}$. Infine calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\mathrm{e}^{-n|\sin x|} f(x)\mathrm{d}x, \qquad f \in \mathcal{K}.$$

[punteggio 6]

Si osservi innanzitutto che $g_n(x)$ è una funzione continua a tratti, pertanto localmente integrabile, e quindi φ_{g_n} è una distribuzione regolare nello spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{K}$. Per ogni $f \in \mathcal{K}$ si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_{g_n}(f) &= \int_{\mathbb{R}} g_n(x) f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} n\mathrm{e}^{nx} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{nx} f(x)\big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{nx} f'(x)\mathrm{d}x \\
&\qquad - \mathrm{e}^{-nx} f(x)\big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} f'(x)\mathrm{d}x \\
&= 2f(0) - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{nx} f'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} f'(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Entrambi gli integrali che compaiono in quest'ultima espressione si annullano per $n \to \infty$. Si consideri, ad esempio, il primo. Risulta

$$\left|\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{nx} f'(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{nx}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \le \left\|f'\right\|_u \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{g_n}(f) = 2f(0) = 2\delta_0(f)$$

che, per l'arbitrarietà di $f \in \mathcal{K}$, implica

$$\varphi_{g_n} \xrightarrow{\mathcal{K}^*} 2\delta_0.$$

Si osservi che $n\mathrm{e}^{-n|\sin x|} = g_n(\sin(x)) = (g_n \circ \sin)(x)$, pertanto

$$\varphi_{g_n\circ\sin} \xrightarrow{\mathcal{K}^*} 2\delta_0[\sin] = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\pi}$$

in quanto $\sin x = 0$ per $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e $|\sin'(k\pi)| = 1$. In conclusione, $\forall f \in \mathcal{K}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\mathrm{e}^{-n|\sin x|} f(x)\mathrm{d}x = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\pi).$$

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale normato $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ si consideri l'operatore $\theta_{n+} : \ell_2(\mathbb{C}) \mapsto \ell_2(\mathbb{C})$ di traslazione a destra di n posizioni

$$\theta_{n+}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) = (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots).$$

Determinare norma, nucleo, immagine e aggiunto di Hilbert dell'operatore θ_{n+}. Determinare inoltre, se esiste, l'inverso dell'operatore ${\theta_{n+}}^*$.

[punteggio 5]

Per cominciare si osservi che, posto $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$, si ha

$$(\theta_{n+}x)_k = \begin{cases} 0 & 1 \le k \le n \\ x_{k-n} & k \ge n+1 \end{cases}$$

Per ogni $x \in \ell_2$ risulta

$$\|\theta_{n+}x\|_2{}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\theta_{n+}x)_k|^2 = \sum_{k \ge n+1}^{\infty} |x_{k-n}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \|x\|_2{}^2$$

e pertanto

$$\|\theta_{n+}\| = \sup_{x \in \ell_2,\ x \ne 0} \frac{\|\theta_{n+}x\|_2}{\|x\|_2} = 1.$$

Poiché $\theta_{n+}x = 0$ se e solo se $x = 0$, risulta

$$\operatorname{Ker} \theta_{n+} = \{x \in \ell_2 :\ \theta_{n+}x = 0\} = \{0\}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \operatorname{Ran} \theta_{n+} &= \{y \in \ell_2 :\ y = \theta_{n+}x,\ x \in \ell_2\} \\ &= \{y \in \ell_2 :\ y_k = 0,\ 1 \le k \le n\} \subsetneq \ell_2 \end{aligned}$$

L'operatore aggiunto ${\theta_{n+}}^*$ è definito dalla relazione

$$\langle {\theta_{n+}}^* x, y \rangle = \langle x, \theta_{n+}y \rangle \qquad \forall x, y \in \ell_2.$$

Poiché

$$\langle {\theta_{n+}}^* x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} ({\theta_{n+}}^* y)_j \, \overline{y_j},$$

$$\langle x, \theta_{n+}y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{(\theta_{n+}y)_k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \overline{y_{k-n}} = \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+n} \overline{y_j},$$

dall'arbitrarietà di y segue che $\forall x \in \ell_2$

$$({\theta_{n+}}^* x)_j = x_{j+n}, \qquad j \ge 1,$$

cioè ${\theta_{n+}}^* = \theta_{n-}$, con θ_{n-} operatore di traslazione a sinistra di n posizioni. Evidentemente $\operatorname{Ker} \theta_{n-} \supsetneq \{0\}$, pertanto ${\theta_{n+}}^*$ non ha inverso (θ_{n+} è suo inverso destro, $\theta_{n-}\theta_{n+} = I$, ma non sinistro, $\theta_{n+}\theta_{n-} \ne I$).
Alternativamente, tutti i precedenti risultati possono essere ottenuti osservando che $\theta_{n+} = (\theta_+)^n$ e ricordando le proprietà di θ_+.

Esercizio 5 Sia U l'operatore in $(C_2([0,2\pi];\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$(Uf)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} f(x).$$

Dimostrare che U è unitario, cioè $U^*U = UU^* = I$, e determinare il suo spettro.

[punteggio 6]

L'operatore aggiunto U^* è definito dalla relazione

$$\langle U^* f, g\rangle = \langle f, Ug\rangle \qquad \forall f, g \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C}).$$

Poiché

$$\langle U^* f, g\rangle = \int_0^{2\pi} (U^* f)(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

$$\langle f, Ug\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{(Ug)(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

dall'arbitrarità di g segue che $(U^*f)(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} f(x)$ $\forall f \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C})$. Pertanto $(UU^*f)(x) = (U^*Uf)(x) = f(x)$ $\forall f \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C})$, cioè $U^*U = UU^* = I$.
Per determinare lo spettro di U, iniziamo a studiare

$$\mathrm{Ker}(zI - U) = \{f \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C}) :\ (zI - U)f = 0\}.$$

L'equazione agli autovalori $(zI - U)f = 0$ fornisce

$$(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})f(x) = 0, \qquad x \in [0,2\pi].$$

Se $|z| \neq 1$, l'equazione ammette la sola soluzione banale $f = 0$. Se $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in [0,2\pi]$, la soluzione è $f(x) = 0$ per $x \neq \theta$. Per la continuità di f si deve ammettere che l'unica soluzione possibile è ancora $f = 0$. In conclusione $\mathrm{Ker}(zI - U) = \{0\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, cioè $zI - U$ è sempre iniettivo e $\sigma_p(U) = \emptyset$.
Per determinare lo spettro continuo, studiamo

$$\mathrm{Ran}(zI - U) = \{g \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C}) :\ g = (zI - U)f,\ f \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C})\}.$$

Deve risultare

$$f(x) = \frac{g(x)}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}, \qquad x \in [0,2\pi].$$

Se $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in [0,2\pi]$, risulta f non continua in $x = \theta$ se g non si annulla in questo punto. Dunque $zI - U$ è iniettivo non suriettivo. Se $|z| \neq 1$, $\mathrm{Ran}(zI - U) = C_2([0,2\pi];\mathbb{C})$ e quindi $zI - U$ è invertibile. Concludiamo che $\sigma_c(U) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$.

<u>Esercizio 6</u> Sia $f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ con $f(x) = 1 - x$. Stabilire a quale valore convergono puntualmente in $x = 0$ i tre sviluppi in serie di Fourier in $[0, \pi]$ corrispondenti a basi ortogonali costituite da a) sole funzioni seno, b) sole funzioni coseno, c) funzioni seno e coseno. Dei tre sviluppi determinare esplicitamente quello che converge puntualmente a $f(x)$ $\forall x \in [0, \pi]$.

[punteggio 6]

a) Lo sviluppo converge puntualmente alla funzione ottenuta prolungando f in modo dispari da $[0, \pi]$ a $[-\pi, \pi]$ e quindi prolungando la funzione così ottenuta a tutto $\mathbb{R}$ con periodicità 2π. In $x = 0$ la serie converge a $(f(0) - f(0))/2 = 0$.

b) Lo sviluppo converge puntualmente alla funzione ottenuta prolungando f in modo pari da $[0, \pi]$ a $[-\pi, \pi]$ e quindi prolungando la funzione così ottenuta a tutto $\mathbb{R}$ con periodicità 2π. In $x = 0$ la serie converge a $(f(0) + f(0))/2 = 1$.

c) Lo sviluppo converge puntualmente alla funzione ottenuta prolungando f periodicamente da $[0, \pi]$ a tutto $\mathbb{R}$. In $x = 0$ la serie converge a $(f(0) + f(\pi))/2 = 1 - \pi/2$.

Lo sviluppo che converge puntualmente a $f(x)$ $\forall x \in [0, \pi]$ è quello in termini di sole funzioni coseno

$$f(x) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}_k \cos(kx)$$

con

$$\hat{a}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x.$$

Risulta

$$\hat{a}_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x) \mathrm{d}x = 2 - \pi,$$

e per $k > 0$

$$\begin{aligned}
\hat{a}_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x) \cos(kx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(k\pi)}{k} - \frac{k\pi \sin(k\pi) + \cos(k\pi) - 1}{k^2} \right) = \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k^2} \cos(kx) \\
&= 1 - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x).
\end{aligned}$$