MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 13 settembre 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Dimostrare le seguenti affermazioni, se vere, o fornire un controesempio, se false:

a) l'unione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso;

b) l'intersezione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso.

[punteggio 6]

a) Falso. Si consideri in $\mathbb{C}$ l'infinità numerabile di chiusi $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ dove $A_k = \overline{B}(0, 1 - 1/k)$. Evidentemente si ha $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = B(0, 1)$ che è un aperto.

b) Vero. Sia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una infinità numerabile di insiemi chiusi. Per le leggi di de Morgan

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k)^c .$$

Basta quindi dimostare che l'unione numerabile di aperti è un aperto, che, in base alla definizione di aperto, è banale.

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} z^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{-\mathrm{i}n} z^n, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \log(\mathrm{i}n) z^{2n}.$$

[punteggio 6]

---

a) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} \frac{(3n+4)!}{(3n+3)! + 4^{n+1}} \\ &= \frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)[1 + 4^n/(3n)!]}{(3n+3)(3n+2)(3n+1) + 4^{n+1}/(3n)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1,\end{aligned}$$

avendo usato $\ln n! \simeq n \ln n - n$. Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.$$

b) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \mathrm{i}^{-\mathrm{i}n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n \log \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\ln 1 + \mathrm{i}\pi/2)} = \mathrm{e}^{n\pi/2}.$$

Osservando che $|a_n|^{1/n} = \mathrm{e}^{\pi/2}$, si conclude che

$$R = \mathrm{e}^{-\pi/2}.$$

c) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} \log(\mathrm{i}n/2) & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}.$$

Osservando che $|\log(\mathrm{i}n/2)| = \sqrt{(\ln(n/2))^2 + \pi^2/4}$ e ricordando che $(\ln k)^{1/k}$ per $k \to \infty$ decresce monotonamente a 1, si ha

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m,\ n \text{ pari}} \left\{ \left(\sqrt{(\ln(n/2))^2 + \pi^2/4} \right)^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\sqrt{(\ln(n_m/2))^2 + \pi^2/4} \right)^{1/n_m} \\ &= 1, \end{aligned}$$

avendo posto $n_m = m$ se m è pari e $n_m = m + 1$ se m è dispari. In conclusione, $R = 1$.

Esercizio 3 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma z^z(1+\log z)\mathrm{d}z,$$

dove γ è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario.

[punteggio 5]

Posto $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, il ramo principale di $F(z) = z^z$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{z\log z} = \mathrm{e}^{z\log z}(\log z + 1).$$

Posto $\gamma_{R,\varepsilon}(\varphi) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $-(\pi-\varepsilon) \le \varphi \le \pi+\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, per $z \in \{\gamma_{R,\varepsilon}\}$ la funzione $F(z)$ è una primitiva della funzione integranda $f(z) = z^z(1+\log z)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} z^z(1+\log z)\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} z^z(1+\log z)\mathrm{d}z \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} z^z\Big|_{z=R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}}^{z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathrm{e}^{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}[\ln R+\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)]} - \mathrm{e}^{R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}[\ln R-\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)]}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-R(\ln R+\mathrm{i}\pi)} - \mathrm{e}^{-R(\ln R-\mathrm{i}\pi)} \\
&= -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-R\ln R}\sin(\pi R) \\
&= -\frac{2\mathrm{i}\sin(\pi R)}{R^R}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

[punteggio 5]

Si veda testo di riferimento a pagina 125.

Esercizio 5 Determinare la natura della singolarità isolata in z = 0 della seguente funzione e calcolarne il corrispondente residuo:

$$f(z) = \left(\frac{1}{\tan z} - \frac{1}{\sin z}\right)\frac{1}{z^2}.$$

[punteggio 5]

Innanzitutto scriviamo

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2 \sin z}.$$

Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor di $\cos z$ e $\sin z$ intorno a $z = 0$ e il comportamento della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots}{z^2\left(z - \frac{z^3}{6} + \dots\right)} \\
&= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} + \dots\right)\left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} + \dots\right)\left[1 + \left(\frac{z^2}{6} - \dots\right) + \left(\frac{z^2}{6} - \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2} - \frac{z^2}{24} + O(z^4)\right) \\
&= -\frac{1}{2z} - \frac{z}{24} + O(z^3).
\end{aligned}$$

Pertanto f ha in $z = 0$ un polo semplice e risulta

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px) - \cos(qx)}{x^2} \mathrm{d}x,$$

con p, q interi relativi. Disegnare il cammino di integrazione e giustificare ogni singolo passaggio.

[punteggio 6]

Per la parità della funzione coseno possiamo assumere p, q non negativi. Si consideri la funzione complessa $f(z) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}qz}\right)/z^2$ che ha un polo semplice in $z = 0$ con

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \mathrm{i}(p - q).$$

Si integri $f(z)$ lungo il cammino $\gamma = \lambda_1^l + \gamma_r^- + \lambda_1^r + \gamma_R$, orientato positivamente, dove $\lambda_1^l(x) = x$, $-R \le x \le -r$, $\gamma_r^-(\theta) = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $-\pi \le \theta \le 0$, $\lambda_1^r(x) = x$, $r \le x \le R$, $\gamma_R(\theta)) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. Essendo il polo esterno al cammino γ, per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Osservando che gli integrali lungo le componenti di γ valgono

$$\int_{\lambda_1^l} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}}{x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\gamma_r^-} f(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{r\to 0} -\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \pi(p - q),$$

$$\int_{\lambda_1^r} f(z)\mathrm{d}z = \int_{r}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}}{x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}pR(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}qR(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Si osservi che per determinare l'ultimo limite si sono usate le proprietà $\mathrm{e}^{-pR\sin\theta} \le 1$ e $\mathrm{e}^{-qR\sin\theta} \le 1$ valide per per $0 \le \theta \le \pi$ e p, q non negativi. Si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px) - \cos(qx)}{x^2} \mathrm{d}x = \pi(q - p).$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova B3 – 13 settembre 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Esiste un prodotto scalare in $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ tale che $\|f\|_u^2 = \langle f, f\rangle\ \forall f \in C_c(\mathbb{R})$? Dimostrarlo in caso di risposta positiva o fornire un controesempio in caso di risposta negativa.

[punteggio 5]

Non esiste, infatti è possibile trovare funzioni che violano la regola del parallelogramma.
Si considerino le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Risulta $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ con $\|f\|_u = \|g\|_u = 1$ e $\|f+g\|_u = \|f-g\|_u = 2$. La regola del parallelogramma

$$\|f+g\|_u^2 + \|f-g\|_u^2 = 2(\|f\|_u^2 + \|g\|_u^2)$$

è quindi violata.

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale $C_2[0,\pi]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x$ sia $W = \mathrm{span}\{1, \sin x\}$. Determinare il nucleo integrale $K(x,y)$ corrispondente all'operatore π_W proiezione ortogonale nel sottospazio W. Quindi determinare la proiezione della funzione $\cos x$.

[punteggio 5]

$$W(x,y) = \frac{1}{\pi} + \frac{2\pi}{\pi^2 - 8}\left(\sin x - \frac{2}{\pi}\right)\left(\sin y - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\pi_W(\cos x) = \int_0^\pi K(x,y)\cos y \mathrm{d}y = 0$$

Esercizio 3 Semplificare le seguenti distribuzioni

a) $\cos(x)\,|x|'''$, b) $x^2\delta_0'''$ c) $(x^2\,\mathrm{sgn}(x))'$ d) $(x^2(\log|x|)')'$

[punteggio 6]

a)

$$\cos(x)\,|x|''' = \cos(x)\,\mathrm{sgn}(x)'' = 2\cos(x)\delta_0' = 2(\cos(0)\delta_0' + \sin(0)\delta_0) = 2\delta_0'$$

b)

$$x^2\delta_0''' = x^2\big|_0\,\delta_0''' - 3\,(2x)\big|_x = 0\delta_0'' + 3\cdot 2\delta_0' = 6\delta_0'$$

c)

$$(x^2\,\mathrm{sgn}(x))' = 2x\,\mathrm{sgn}(x) + 2x^2\delta_0 = 2x\,\mathrm{sgn}(x) = 2\,|x|$$

d)

$$(x^2(\log|x|)')' = (x^2P(1/x))' = (x)' = 1$$

Esercizio 4 Sia V uno spazio vettoriale e Z uno spazio di Banach. Lo spazio vettoriale degli operatori lineari continui da V in Z equipaggiato con la usuale norma operatoriale, $(\mathcal{L}(V, Z), \|\cdot\|)$, è completo? Dimostrarlo in caso di risposta positiva o fornire un controesempio in caso di risposta negativa.

[punteggio 5]

Sì, è completo. Si veda la Proposizioe 6.15 del testo di riferimento.

Esercizio 5 Determinare lo spettro e la norma di U operatore nello spazio vettoriale normato $(C[-q,q], \|\cdot\|_u)$, $q > 0$, definito da

$$(Uf)(x) = \cosh(x^2)f(x).$$

[punteggio 6]

Per determinare lo spettro di U, iniziamo a studiare

$$\mathrm{Ker}(zI - U) = \{f \in C[-q,q] : \ (zI - U)f = 0\}.$$

L'equazione agli autovalori $(zI - U)f = 0$ fornisce

$$(z - \cosh(x^2))f(x) = 0, \qquad x \in [-q,q].$$

Se $z \notin [1, \cosh(q^2)]$, l'equazione ammette la sola soluzione banale $f = 0$. Se $z \in [1, \cosh(q^2)]$, la soluzione è $f(x) = 0$ per $x \neq x_z^{\pm}$, dove $x_z^{\pm}$ sono i due punti di $[-q,q]$ tali che $\cosh((x_z^{\pm})^2) = z$. Per la continuità di f si deve ammettere che l'unica soluzione possibile è ancora $f = 0$. In conclusione $\mathrm{Ker}(zI - U) = \{0\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, cioè $zI - U$ è sempre iniettivo e $\sigma_p(U) = \emptyset$.
Per determinare lo spettro continuo, studiamo

$$\mathrm{Ran}(zI - U) = \{g \in C[-q,q] : \ g = (zI - U)f, \ f \in C[-q,q]\}.$$

Deve risultare

$$f(x) = \frac{g(x)}{z - \cosh(x^2)}, \qquad x \in [-q,q].$$

Se $z \in [1, \cosh(q^2)]$, si ha che f è non continua in $x = x_z^{\pm}$ se g non si annulla in entrambi questi punti. Dunque $zI - U$ è iniettivo non suriettivo. Se $z \notin [1, \cosh(q^2)]$, $\mathrm{Ran}(zI - U) = C[-q,q]$ e quindi $zI - U$ è invertibile. Concludiamo che $\sigma_c(U) = [1, \cosh(q^2)]$.
Per quanto riguarda la norma, $\forall f \in C[-q,q]$ si ha

$$\|Uf\|_u = \sup_{x \in [-q,q]} \left|\cosh(x^2)f(x)\right| \leq \cosh(q^2)\|f\|_u$$

da cui si ricava $\|U\| \leq \cosh(q^2)$. Dovendo inoltre valere la relazione $\sigma(U) \subset \overline{B}(0, \|U\|)$, si ha anche $\cosh(q^2) \leq \|U\|$. In conclusione, $\|U\| = \cosh(q^2)$.

Esercizio 6 Dopo averla disegnata, sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = |x - \operatorname{sgn}(x)|, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

A cosa converge la serie così ottenuta nei punti $x = 0$, $x = \pm 1$ e $x = \pm\pi$?

[punteggio 6]

Poiché $f(-x) = f(x)$ deve essere $b_k = 0$ per $k = 1, 2, \ldots$. I coefficienti di $\cos(kx)$ valgono

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos(kx)dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}(x-1)\cos(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k} - \frac{\cos(kx)}{k^2} - \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^1 \\
&\quad + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k} - \frac{\sin(kx)}{k}\right]_1^{\pi} \\
&= \frac{2(1 - 2\cos(k) + \cos(k\pi))}{\pi k^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}(x-1)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^{\pi} \\
&= \frac{2 - 2\pi + \pi^2}{\pi}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \\
&\sim \frac{2 - 2\pi + \pi^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - 2\cos(k) + \cos(k\pi))}{\pi k^2}\cos(kx)
\end{aligned}$$

La funzione f è continua in $(-\pi, \pi)$ e pari, pertanto il suo prolungamento periodico in $\mathbb{R}$ è una funzione continua in ogni punto. Segue che la serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Nei punti $x = 0$, $x = \pm 1$ e $x = \pm\pi$ essa quindi converge rispettivamente a $f(0) = 1$, $f(\pm 1) = 0$ e $f(\pm\pi) = \pi - 1$.