MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 13 settembre 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} z^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{-\mathrm{i}n} z^n, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \log(\mathrm{i}n) z^{2n}.$$

[punteggio 6]

a) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} \frac{(3n+4)!}{(3n+3)! + 4^{n+1}} \\ &= \frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)[1 + 4^n/(3n)!]}{(3n+3)(3n+2)(3n+1) + 4^{n+1}/(3n)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1,\end{aligned}$$

avendo usato $\ln n! \simeq n \ln n - n$. Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.$$

b) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \mathrm{i}^{-\mathrm{i}n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n \log \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\ln 1 + \mathrm{i}\pi/2)} = \mathrm{e}^{n\pi/2}.$$

Osservando che $|a_n|^{1/n} = \mathrm{e}^{\pi/2}$, si conclude che

$$R = \mathrm{e}^{-\pi/2}.$$

c) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} \log(\mathrm{i}n/2) & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}.$$

Osservando che $|\log(\mathrm{i}n/2)| = \sqrt{(\ln(n/2))^2 + \pi^2/4}$ e ricordando che $(\ln k)^{1/k}$ per $k \to \infty$ decresce monotonamente a 1, si ha

$$\begin{aligned}R^{-1} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{|a_n|^{1/n}\right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m,\ n \text{ pari}} \left\{\left(\sqrt{(\ln(n/2))^2 + \pi^2/4}\right)^{1/n}\right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\sqrt{(\ln(n_m/2))^2 + \pi^2/4}\right)^{1/n_m} \\ &= 1,\end{aligned}$$

avendo posto $n_m = m$ se m è pari e $n_m = m + 1$ se m è dispari. In conclusione, $R = 1$.

Esercizio 2 Posto $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$d(z_1, z_2) = |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|\,,$$

dimostrare che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico e, infine, disegnare la palla aperta $B(1 + \mathrm{i}3, 1)$.

[punteggio 5]

Per dimostrare che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico occorre mostare che d è una distanza, ovvero che $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sono soddisfatte le proprietà

a) $d(z_1, z_2) \geq 0$;

b) $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$;

c) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

d) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

La prima proprietà è vera in quanto il valore assoluto di un numero reale è sempre non negativo. La seconda segue dal fatto che $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $|\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| = |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)| = 0$ che a sua volta è vera se e solo se $z_1 = z_2$. La terza discende dal fatto che $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. Per quanto riguarda la proprietà triangolare si ha

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_2) &= |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)| \\
&\leq |\mathrm{Re}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Re}(z_3 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Im}(z_3 - z_2)| \\
&= (|\mathrm{Re}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_3)|) + (|\mathrm{Re}(z_3 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_3 - z_2)|) \\
&= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2),
\end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$.

Per definizione risulta

$$\begin{aligned}
B(1 + \mathrm{i}3, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : \ d(z, 1 + \mathrm{i}3) < 1\} \\
&= \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : \ |x - 1| + |y - 3| < 1\}.
\end{aligned}$$

La precedente disuguaglianza è soddisfatta dai punti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$-1 + |x - 1| < y - 3 < 1 - |x - 1|\,.$$

Per $x > 1$ deve essere $x - 2 < y - 3 < 2 - x$ cioé $1 + x < y < 5 - x$. Per $x < 1$ deve essere $-x < y - 3 < x$ cioé $3 - x < y < 3 + x$. È facile verificare che tali punti corrispondono al quadrato, bordo escluso, di vertici $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 4)$ e $(0, 3)$.

Esercizio 3 Determinare, motivando la risposta, il dominio di analiticità della seguente funzione e calcolarne la derivata prima

$$f(z) = (\ln r)^2 - \theta^2 + \mathrm{i}2\theta \ln r,$$

dove $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$ e $r \geq 0$.

[punteggio 6]

Posto $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$, si ha

$$u(r,\theta) = (\ln r)^2 - \theta^2, \qquad v(r,\theta) = 2\theta \ln r.$$

Innanzitutto si osservi che per $r = 0$, cioé $z = 0$, f non è definita né sarebbe possibile definirla in modo da risultare continua. In tale punto quindi f non è derivabile. Si osservi poi che per ogni $r > 0$ si ha $v(r,\pi) \neq \lim_{\theta\to-\pi} v(r,\theta)$, pertanto lungo il semiasse reale negativo, origine esclusa, f risulta non continua e quindi non derivabile. Per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$u_r(r,\theta) = \frac{2}{r}\ln r, \qquad u_\theta(r,\theta) = -2\theta,$$
$$v_r(r,\theta) = \frac{2\theta}{r}, \qquad v_\theta(r,\theta) = 2\ln r,$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Nello stesso dominio $f(z)$ risulta quindi derivabile e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r,\theta) + \mathrm{i}v_r(r,\theta))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= \left(\frac{2}{r}\ln r + \mathrm{i}\frac{2\theta}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= \frac{2}{z}g(z), \qquad g(z) = \ln r + \mathrm{i}\theta. \end{aligned}$$

in accordo con il fatto che $f(z) = g(z)^2 = (\log z)^2$. Il dominio di analiticità di f è $D = \{z \in \mathbb{C} :\ z \neq -t,\ t \in [0,\infty)\}$.

<u>Esercizio 4</u> Sia f analitica in $B(z_0, r)$. Dimostrare che per ogni $\rho < r$ vale il teorema del valore medio di Gauss

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t.$$

[punteggio 5]

Sia $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ un cammino circolare di centro z_0 orientato positivamente di raggio $\rho < r$. Poiché f è analitica su γ_ρ e al suo interno, per la formula integrale di Cauchy si ha

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_\rho(t))}{\gamma_\rho(t) - z_0} \gamma_\rho'(t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z_0} \mathrm{i}\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, determinare, fino all'ordine z^2 compreso, lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^5}\log(\cos z).$$

Classificare la natura della singolarità di $f(z)$ in $z = 0$.

[punteggio 5]

Si osservi che $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione della singolarità isolata in $z = 0$ e del semiase di diramazione $[\pi/2, \infty)$. Usando gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < \infty,$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \qquad |z| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^5}\log(\cos z) &= \frac{1}{z^5}\log\left[1 + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right] \\
&= \frac{1}{z^5}\left[\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= -\frac{1}{2z^3} - \frac{1}{12z} - \frac{1}{45}z + O(z^3).
\end{aligned}$$

Lo sviluppo così trovato è uno sviluppo di Laurent valido nella regione $0 < |z| < \pi/2$. La funzione $f(z)$ presenta un polo triplo in $z = 0$ con residuo $-1/12$.

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(qx)}{x^2}\mathrm{d}x,$$

con q intero relativo. Disegnare il cammino di integrazione e giustificare ogni singolo passaggio.

[punteggio 6]

L'integrale in esame è un caso particolare ($p = 0$) del seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px)-\cos(qx)}{x^2}\mathrm{d}x,$$

con p, q interi relativi. Per la parità della funzione coseno possiamo assumere p, q non negativi. Si consideri la funzione complessa $f(z) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}qz}\right)/z^2$ che ha un polo semplice in $z = 0$ con

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \mathrm{i}(p-q).$$

Si integri $f(z)$ lungo il cammino $\gamma = \lambda_1^l + \gamma_r^- + \lambda_1^r + \gamma_R$, orientato positivamente, dove $\lambda_1^l(x) = x$, $-R \le x \le -r$, $\gamma_r^-(\theta) = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $-\pi \le \theta \le 0$, $\lambda_1^r(x) = x$, $r \le x \le R$, $\gamma_R(\theta)) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. Essendo il polo esterno al cammino γ, per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Osservando che gli integrali lungo le componenti di γ valgono

$$\int_{\lambda_1^l} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}}{x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\gamma_r^-} f(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{r\to 0} -\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \pi(p-q),$$

$$\int_{\lambda_1^r} f(z)\mathrm{d}z = \int_{r}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}}{x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}pR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}qR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Si osservi che per determinare l'ultimo limite si sono usate le proprietà $\mathrm{e}^{-pR\sin\theta} \le 1$ e $\mathrm{e}^{-qR\sin\theta} \le 1$ valide per per $0 \le \theta \le \pi$ e p, q non negativi. Si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px)-\cos(qx)}{x^2}\mathrm{d}x = \pi(q-p).$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova B3 – 13 settembre 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Sia $f \in C[a,b]$, dimostrare che per ogni reale $p > 1$ risulta

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_p \, |b-a|^{1/q} \,,$$

dove $q > 1$ è il reale determinato dalla relazione $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

[punteggio 5]

Per ogni coppia di funzioni $f, g \in C[a,b]$ vale la disuguaglianza di Hölder

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q} \,,$$

con $p > 1$ arbitrario e $q > 1$ tale che $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Con la scelta $g(x) = 1$, $\forall f \in C[a,b]$ e $\forall p > 1$ risulta

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b \mathrm{d}x \right)^{1/q} \,,$$

cioè

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_p \, |b-a|^{1/q} \,, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

La disuguaglianza di Hölder e quindi quella ricavata valgono anche nei limiti $p \to 1$, $q \to \infty$ e $p \to \infty$, $q \to 1$. Nel primo caso si ha banalmente $\|f\|_1 \leq \|f\|_1$ mentre nel secondo $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \, |b-a|$.

Esercizio 2 Nello spazio Euclideo pesato $(C_2(\mathbb{R};\mathbb{C}), \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x))$ con prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

sia $W = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\}$. Scomporre il vettore $v(x) = \sin(2x)$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$. Si ricordi che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-b^2}$ se $b \in \mathbb{R}$.

[punteggio 6]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\}$

$$u_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

$$u_2(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\overline{u_1(y)}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{\|u_1\|^2}u_1(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \frac{\sqrt{\pi}/\mathrm{e}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1}$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1}\right)\overline{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1})}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}(1-\mathrm{e}^{-2}).$$

Risulta $W = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\} = \mathrm{span}\{u_1, u_2\}$. Usando il proiettore π_W costruito in termini di (u_1, u_2), base ortogonale di W,

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k$$

si ha

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2y)\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{\sqrt{\pi}}u_1(x) + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2y)\overline{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y-1})}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{\sqrt{\pi}(1-\mathrm{e}^{-2})}u_2(x)\\
&= \frac{\sqrt{\pi}(\mathrm{e}^{-1/4} - \mathrm{e}^{-9/4})}{2\mathrm{i}\sqrt{\pi}}u_1(x) + \frac{\sqrt{\pi}(\mathrm{e}^{-9/4} - \mathrm{e}^{-5/4} - \mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-13/4})}{2\mathrm{i}\sqrt{\pi}(1-\mathrm{e}^{-2})}u_2(x)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-1/4} - \mathrm{e}^{-9/4}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{\mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-5/4}}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1})\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-5/4}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{\mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-5/4}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\\
&= (\mathrm{e}^{-1/4} + \mathrm{e}^{-5/4})\sin(x)\\
&= \mathrm{e}^{-5/4}(1+\mathrm{e})\sin(x)
\end{aligned}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = \sin(2x) - \mathrm{e}^{-5/4}(1+\mathrm{e})\sin(x).$$

Si può verificare che

$$\langle w, z\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\overline{z(x)}e^{-x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

Esercizio 3 Dimostrare che $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$.

[punteggio 5]

Sia $f \in C_0(\mathbb{R})$ arbitraria e si ponga

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq n \\ f(\mathrm{sgn}(x)n)(n+1-|x|) & n < |x| \leq n+1 \\ 0 & |x| > n+1 \end{cases}$$

Risulta $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La successione $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge in norma uniforme a f. Infatti

$$\|f - f_n\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq |f(-n)| + |f(n)| + \sup_{|x|\geq n} |f(x)|\,.$$

Poiché $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ segue che $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_u = 0$.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/2}\delta(x^5 - x)\mathrm{d}x,$$

dove $\delta(x^5 - x)$ è la distribuzione δ di Dirac composta $\delta_0[x^5 - x]$.

[punteggio 5]

Si ponga $b(x) = x^5 - x$. La funzione $b(x)$ si annulla nei punti $x = 0$ e $x = \pm 1$. Inoltre risulta $b'(x) = 5x^4 - 1$ e quindi $|b'(0)| = 1$ e $|b'(\pm 1)| = 4$. Pertanto

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/2}\delta(x^5 - x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/2}\left(\frac{1}{|b'(0)|}\delta(x) + \frac{1}{|b'(1)|}\delta(x-1) + \frac{1}{|b'(-1)|}\delta(x+1)\right)\mathrm{d}x \\
&\quad = 1 + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\right) \\
&\quad = 1 + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} \\
&\quad = 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3}, \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4}, \frac{x_4}{4} + \frac{x_5}{5}, \dots).$$

Determinare T^* e lo spettro puntuale di T. Stabilire se $z = 0$ appartiene allo spettro continuo di T.

[punteggio 6]

L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\langle T^*x, y\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (T^*x)_k \overline{y_k} \\
\langle x, Ty\rangle &= x_1 \overline{\left(\frac{y_1}{1} + \frac{y_2}{2}\right)} + x_2 \overline{\left(\frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3}\right)} + x_3 \overline{\left(\frac{y_3}{3} + \frac{y_4}{4}\right)} + \dots \\
&= x_1 \overline{y_1} + \frac{x_1 + x_2}{2} \overline{y_2} + \frac{x_2 + x_3}{3} \overline{y_3} + \frac{x_3 + x_4}{4} \overline{y_4} + \dots
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{x_3 + x_4}{4}, \frac{x_4 + x_5}{5}, \dots).$$

Studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare $\mathrm{Ker}(zI - T)$ ovvero trovare, se esistono, le soluzioni non banali dell'equazione per gli autovalori $(zI - T)x = 0$. Questa equazione implica

$$z x_k = \frac{x_k}{k} + \frac{x_{k+1}}{k+1}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

che risolta fornisce

$$x_{k+1} = \left(z - \frac{1}{k}\right)\left(z - \frac{1}{k-1}\right) \dots \left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 1)\,(k+1)!\; x_1.$$

Se $z = 0$, si ha $x_{k+1} = (-1)^k (k+1) x_1$ che evidentemente non è una successione di ℓ_2 quindi $z = 0$ non è autovalore. Se $z = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, abbiamo un autovalore degenere con infiniti autovettori associati del tipo

$$x_k = \begin{cases} a, & k = 1 \\ a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k-2}\right) \dots \left(\frac{1}{n} - 1\right) k! & 2 \le k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{C}$ arbitrario purché non nullo. Se $z \neq 0$ e $z \neq 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, si ha $\lim_{k\to\infty} |x_k| = \infty$, pertanto la corrispondente successione non appartiene a ℓ_2 e quindi z non è autovalore. In conclusione $\sigma_p(T) = \{1/n,\ n = 1, 2, \dots\}$. Poiché lo spettro $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ è chiuso, $z = 0$ che è un punto limite di $\sigma_p(T)$ deve appartenere a $\sigma(T)$. Abbiamo già stabilito che $z = 0$ non appartiene a $\sigma_p(T)$ quindi esso deve appartenere a $\sigma_c(T)$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $x^2 \mathrm{e}^{-3(x-2)^2}$. Si rammenti il risultato notevole $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\lambda) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}$.

[punteggio 6]

A partire dal risultato notevole

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4},$$

e utilizzando le proprietà generali della trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(x)](\lambda/a), \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

$$\mathcal{F}[f(x+b)](\lambda) = \mathcal{F}[f(x)](\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}, \qquad b \in \mathbb{R},$$

si ha

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3x^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12},$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda 2}.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[x^2\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) &= \mathrm{i}^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}\left(-\frac{\lambda}{6}-2\mathrm{i}\right)\right) \\
&= -\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}\left(-\frac{\lambda}{6}-2\mathrm{i}\right)^2 + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}\left(-\frac{1}{6}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{25}{6}-\frac{\mathrm{i}2\lambda}{3}-\frac{\lambda^2}{36}\right)\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}.
\end{aligned}$$