MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 14 luglio 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $z^3 - 2\mathrm{i} = 0$, b) $z^{2\mathrm{i}} - 3 = 0$.

[punteggio 6]

a) Si ha

$$z = \sqrt[3]{2\mathrm{i}} = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)^{1/3} = 2^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2+2\pi k)/3}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

che corrisponde alle 3 soluzioni

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}, \\ z_1 &= 2^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}, \\ z_2 &= 2^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}9\pi/6} = -2^{1/3}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

b) Usando $z^w = \exp(w \log z)$, si ha

$$\begin{aligned} z &= 3^{1/(2\mathrm{i})} \\ &= 3^{-\mathrm{i}/2} \\ &= \exp\left[-\mathrm{i}/2 \log\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\right)\right] \\ &= \exp\left[-\mathrm{i}/2\left(\ln 3 + \mathrm{i}2\pi k\right)\right] \\ &= \mathrm{e}^{\pi k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\ln 3)/2}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione $g(z) = \log((3z^2 - \overline{z}^2)\overline{z}/2)$, dove $\log(\cdot)$ è il ramo principale del logaritmo. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità di g.

[punteggio 5]

La funzione $g(z) = \log(f(z))$ è composizione del ramo principale di $\log(z)$ e della funzione $f(z) = (3z^2 - \overline{z}^2)\overline{z}/2$. Studiamo separatamente le proprietà di continuità, derivabilità e analiticità di queste due funzioni componenti.
La funzione log è continua, derivabile e analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo origine compresa.
In quanto composizione di funzioni continue in tutto $\mathbb{C}$, f è continua in tutto $\mathbb{C}$. Per studiarne la derivabilità, si osservi che, posto $z = x + \mathrm{i}y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^3 + 3xy^2 + \mathrm{i}(y^3 + 3x^2y),$$

pertanto $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = x^3 + 3xy^2$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = y^3 + 3x^2y$. Le funzioni u e v sono derivabili in tutto $\mathbb{R}^2$ con derivate

$$\begin{aligned} &u_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2, \qquad u_y(x, y) = 6xy, \\ &v_x(x, y) = 6xy, \qquad v_y(x, y) = 3y^2 + 3x^2, \end{aligned}$$

continue in tutto $\mathbb{R}^2$. Le equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, sono quindi

$$\begin{aligned} &3x^2 + 3y^2 = 3x^2 + 3y^2, \\ &6xy = -6xy. \end{aligned}$$

La prima equazione è sempre soddisfatta, la seconda solo se $x = 0$ oppure $y = 0$. Segue che f è derivabile solo nei punti degli assi coordinati. In nessuno di tali punti però la f è analitica. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ la palla $B(z, \varepsilon)$, con z reale o immaginario puro, contiene punti w tali che $\operatorname{Re} w \neq 0$ e $\operatorname{Im} w \neq 0$ in cui la f è non derivabile.
Nel comporre i domini di continuità di log e f, si osservi che $f(z) = -t$, $t \in [0, \infty)$, è soddisfatta per i punti $z = x + \mathrm{i}y$ tali che

$$\begin{cases} x^3 + 3xy = -t, \\ y^3 + 3x^2y = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione $y = 0$ oppure per $x = y = 0$. Per $y = 0$, dalla prima equazione si ha $x = -\sqrt[3]{t}$. Il dominio di continuità di $g(z) = (\log \circ f)(z)$ è pertanto

$$D_c = \mathbb{C} \setminus \{z(t) = -\sqrt[3]{t},\ t \in [0, \infty)\} = \mathbb{C} \setminus \{z(u) = -u,\ u \in [0, \infty)\}.$$

Ragionando in modo analogo otteniamo che il dominio di derivabilità di $g(z) = (\log \circ f)(z)$ è

$$D_d = \{z(u) = u \text{ oppure } z(u) = \pm \mathrm{i}u,\ u \in (0, \infty)\},$$

mentre quello di analiticità è vuoto

$$D_a = \emptyset.$$

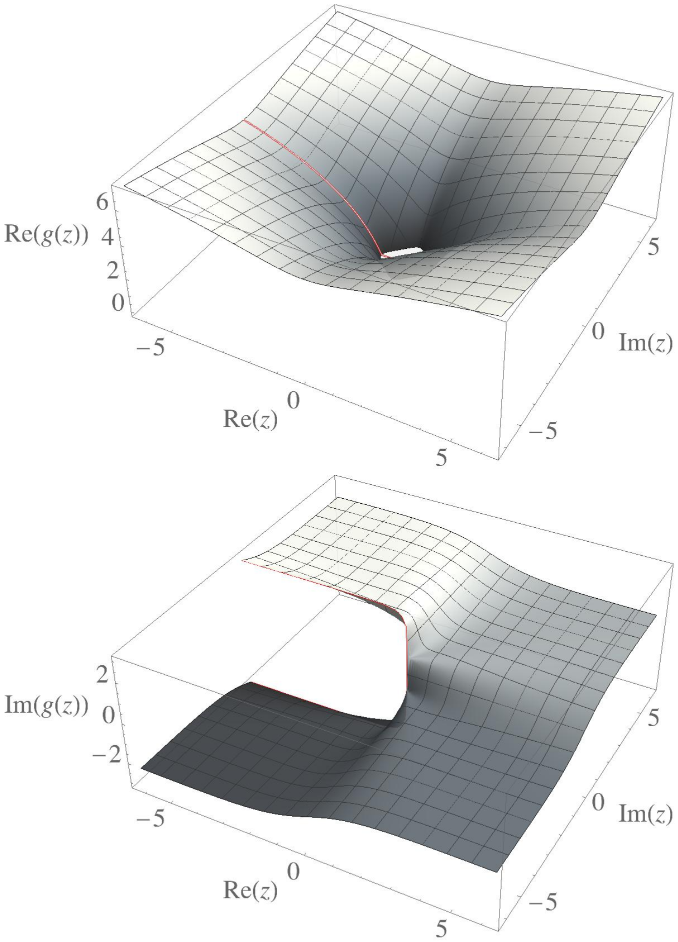

Figura 1: Parte reale e parte immaginaria di $g(z) = \log((3z^2 - \overline{z}^2)\overline{z}/2)$. Si noti la discontinuità lungo il semiasse reale negativo, origine compresa. La funzione è derivabile solo lungo l'asse immaginario e il semiasse reale positivo, origine esclusa.

Esercizio 3 Determinare la natura della singolarità in $z=0$ della funzione

$$f(z) = \left(\frac{\exp(\cos z)}{\sin z} \right)^3$$

e calcolarne il corrispondente residuo. Calcolare inoltre il residuo in $z=0$ delle funzioni $zf(z)$ e $z^2 f(z)$.

[punteggio 6]

Usando gli sviluppi di Taylor notevoli di $\cos z$, $\exp z$ e $\sin z$ intorno a $z=0$, per $|z|<\infty$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\exp(\cos z) &= \exp\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots\right) \\
&= \exp(1)\exp\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots\right) \\
&= \mathrm{e}\left[1 + \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \mathrm{e}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{6} + \dots\right),
\end{aligned}$$

e per $0<|z|<\infty$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots\right)} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \dots.$$

Pertanto nell'anello $0<|z|<\infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left[\mathrm{e}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{6} + \dots\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \dots\right)\right]^3 \\
&= \mathrm{e}^3\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{3} + \dots\right)^3 \\
&= \mathrm{e}^3\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} + \dots\right).
\end{aligned}$$

La funzione $f(z)$ ha in $z=0$ un polo di ordine 3 e risulta

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\mathrm{e}^3.$$

Dallo stesso sviluppo di f segue immediatamente

$$\operatorname*{Res}_{z=0} zf(z) = 0, \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} z^2 f(z) = \mathrm{e}^3.$$

Esercizio 4 Sia $f(z)$ una funzione analitica in $|z| < 2$ e tale che

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{nz-1} \mathrm{d}z = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $f(z) = 0\ \forall z \in B(0,2)$.

[punteggio 5]

Per il teorema di Cauchy si ha

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{nz-1} \mathrm{d}z = \frac{2\pi \mathrm{i}}{n} f(1/n)$$

e pertanto

$$f(1/n) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nel dominio aperto e connesso $B(0,2)$ dove f è analitica, gli zeri di f ammettono il punto limite $z = 0$. Per il teorema di identità questo implica che f è identicamente nulla in $B(0,2)$.

Esercizio 5 Sia $f(z) = p(z)/q(z)$ con p e q funzioni analitiche in z_0. Dimostrare che, se p è non nulla in z_0 e q ha in z_0 uno zero doppio, allora f ha un polo doppio in z_0 e risulta

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p'(z_0)q''(z_0)/2 - p(z_0)q'''(z_0)/6}{(q''(z_0)/2)^2}.$$

[punteggio 5]

Per ipotesi p e q sono analitiche in z_0 e si ha $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = q'(z_0) = 0$ e $q''(z_0) \neq 0$. Ciò implica che in un intorno di z_0 risulta $q(z) = (z-z_0)^2 g(z)$, con g analitica e non nulla in z_0. Nello stesso intorno si ha quindi

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2},$$

con $h(z) = p(z)/g(z)$ funzione analitica e non nulla in z_0. Tanto basta per concludere che f ha in z_0 un polo doppio e

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = h'(z_0) = \frac{p'(z_0)g(z_0) - p(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned}
q(z) &= (z-z_0)^2 g(z), \\
q'(z) &= 2(z-z_0)g(z) + (z-z_0)^2 g'(z), \\
q''(z) &= 2g(z) + 4(z-z_0)g'(z) + (z-z_0)^2 g''(z), \\
q'''(z) &= 6g'(z) + 6(z-z_0)g''(z) + (z-z_0)g'''(z),
\end{aligned}$$

per $z = z_0$ si ottiene

$$\begin{aligned}
q''(z_0) &= 2g(z_0), \\
q'''(z_0) &= 6g'(z_0),
\end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p'(z_0)q''(z_0)/2 - p(z_0)q'''(z_0)/6}{(q''(z_0)/2)^2}.$$

<u>Esercizio 6</u> Si calcoli l'integrale improprio

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x=\lim_{R_1,R_2\to\infty}\lim_{r\to0}\left(\int_{-R_1}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{r}^{R_2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x\right).$$

Disegnare il cammino di integrazione e giustificare ogni singolo passaggio.

[punteggio 6]

Si consideri la funzione $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ che ha un polo semplice in $z=0$ e la si integri lungo il cammino $\gamma=\lambda_1^l+\gamma_r^-+\lambda_1^r+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$, orientato positivamente, dove $\lambda_1^l(x)=x$, $-R_1\le x\le -r$, $\gamma_r^-(\theta)=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $-\pi\le\theta\le0$, $\lambda_1^r(x)=x$, $r\le x\le R_2$, $\lambda_2(y)=R_2+\mathrm{i}y$, $0\le y\le R_1+R_2$, $\lambda_3(x)=x+\mathrm{i}(R_1+R_2)$, $R_2\ge x\ge -R_1$, e $\lambda_4(y)=-R_1+\mathrm{i}y$, $R_1+R_2\ge y\ge0$. Essendo il polo esterno al cammino γ, per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

Osservando che gli integrali lungo le componenti di γ valgono

$$\int_{\lambda_1^l} f(z)\mathrm{d}z=\int_{-R_1}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\gamma_r^-} f(z)\mathrm{d}z\xrightarrow{r\to0}-\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=-\pi\mathrm{i},$$

$$\int_{\lambda_1^r} f(z)\mathrm{d}z=\int_{r}^{R_2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z=\int_{0}^{R_1+R_2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}R_2-y}}{R_2+\mathrm{i}y}\mathrm{d}y\xrightarrow{R_1,R_2\to\infty}0,$$

$$\int_{\lambda_3} f(z)\mathrm{d}z=\int_{R_2}^{-R_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-(R_1+R_2)}}{x+\mathrm{i}(R_1+R_2)}\mathrm{d}x\xrightarrow{R_1,R_2\to\infty}0,$$

$$\int_{\lambda_4} f(z)\mathrm{d}z=\int_{R_1+R_2}^{0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R_1-y}}{-R_1+\mathrm{i}y}\mathrm{d}y\xrightarrow{R_1,R_2\to\infty}0,$$

si conclude

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova B2 – 14 luglio 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Determinare se lo spazio vettoriale $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$, dove $\|x\| = \sup_k |x_k|/\sqrt{k}$, è completo. In caso positivo dimostrarlo, in caso negativo fornire un esempio.

[punteggio 5]

Lo spazio vettoriale in questione non è completo. Si consideri la successione di vettori $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ definiti da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \sqrt[4]{k} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Poiché $\|x^{(n)}\| = \sup_k \left|x_k^{(n)}\right|/\sqrt{k} = \sup_{1\leq k\leq n} 1/\sqrt[4]{k} = 1$, si ha che $x^{(n)} \in (\ell_\infty, \|\cdot\|)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La successione $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ è di Cauchy. Infatti, posto $m > n$, si ha

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \sup_k \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{\sqrt{k}} = \sup_{n+1\leq k\leq m} \frac{1}{\sqrt[4]{k}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

La successione tuttavia non è convergente nello spazio vettoriale considerato. Infatti, si ha $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$ con $x = (1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3}, \dots) \notin (\ell_\infty, \|\cdot\|)$.

<u>Esercizio 2</u> Nello spazio vettoriale $P[0,\infty)$ con prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ sia $W=\text{span}\{x^2,x^3\}$. Determinare la proiezione ortogonale nel sottospazio W del vettore $v(x)=x^n$, dove n è un intero non negativo. Si ricordi che $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$.

[punteggio 5]

Introduciamo il sistema di vettori ortogonali $\{u_1(x),u_2(x)\}$ tale che

$$\text{span}\{u_1(x),u_2(x)\} = \text{span}\{x^2,x^3\}.$$

Secondo la procedura di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt abbiamo

$$u_1(x) = x^2,$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\infty x^4 e^{-x}\mathrm{d}x = 24,$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1(x) = x^3-5x^2,$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^\infty \left(x^3-5x^2\right)^2 e^{-x}\mathrm{d}x = 6!+25\ 4!-10\ 5! = 5!(6+5-10) = 120.$$

Usando π_W, il proiettore ortogonale nel sottospazio W, si ha

$$w = \pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2}\frac{\langle v,u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k,$$

ovvero

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\langle x^n,x^2\rangle}{24}x^2 + \frac{\langle x^n,x^3-5x^2\rangle}{120}(x^3-5x^2) \\ &= \frac{(n+2)!}{24}x^2 + \frac{(n+3)!-5(n+2)!}{120}(x^3-5x^2) \\ &= \frac{6(n+2)!-(n+3)!}{24}x^2 + \frac{(n+3)!-5(n+2)!}{120}x^3. \end{aligned}$$

Si osservi, per verifica, che per $n=2$ si ha $w(x)=x^2$ mentre per $n=3$ risulta $w(x)=x^3$.

<u>Esercizio 3</u> Semplificare la distribuzione a) e calcolare l'integrale b)

a) $D^4(\mathrm{e}^{-x^2}\delta_0'')$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\delta(\sin(2x))\mathrm{d}x$

[punteggio 6]

---

a) Utilizzando la formula $h(x)\delta_0'' = h(0)\delta_0'' - 2h'(0)\delta_0' + h''(0)\delta_0$, si ha

$$\begin{aligned}
D^4(\mathrm{e}^{-x^2}\delta_0'') &= D^4\left(\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{x=0}\delta_0'' - 2\, D(\mathrm{e}^{-x^2})\Big|_{x=0}\delta_0' + D^2(\mathrm{e}^{-x^2})\Big|_{x=0}\delta_0\right)\\
&= D^4\left(\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{x=0}\delta_0'' - 2\,(-2x\mathrm{e}^{-x^2})\Big|_{x=0}\delta_0' + ((4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2})\Big|_{x=0}\delta_0\right)\\
&= D^4\left(\delta_0'' - 2\delta_0\right)\\
&= \delta_0^{(6)} - 2\delta_0^{(4)}.
\end{aligned}$$

b) La funzione $\sin(2x)$ si annulla nei punti $x_k = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sin(2x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_k} = 2\cos(2x_k) = 2\cos(k\pi) = 2(-1)^k,$$

si ha

$$\delta(\sin(2x)) = \frac{1}{|2(-1)^k|}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(x - k\pi/2)$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\delta(\sin(2x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-|k\pi/2|} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\pi/2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi/2}} - \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4 Siano S e T due operatori lineari continui sullo spazio Euclideo complesso $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle$. Dimostrare le seguenti uguaglianze

$$\text{a)} \quad (ST)^* = T^* S^*, \qquad \text{b)} \quad (T^*)^* = T, \qquad \text{c)} \quad \|T^*\| = \|T\|.$$

[punteggio 5]

Detti x e y due arbitrari vettori di V, a partire dalla definizione di aggiunto di un operatore

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle,$$

si ha

a)

$$\langle (ST)^* x, y \rangle = \langle x, STy \rangle = \langle S^* x, Ty \rangle = \langle T^* S^* x, y \rangle$$

b)

$$\langle (T^*)^* x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = \overline{\langle T^* y, x \rangle} = \overline{\langle y, Tx \rangle} = \langle Tx, y \rangle$$

Nota bene: nella dimostrazione di questa proprietà non può essere utilizzata l'uguaglianza $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ che è una conseguenza della proprietà da dimostrare!

c)

$$\|T^* x\|^2 = |\langle T^* x, T^* x \rangle| = |\langle x, TT^* x \rangle| \leq \|x\| \|TT^* x\| \leq \|x\| \|T\| \|T^* x\|$$

dove si è fatto uso della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e della definizione di norma di un operatore. Segue

$$\|T^* x\| \leq \|x\| \|T\|$$

che permette di ricavare

$$\|T^*\| \leq \|T\|.$$

Per il punto b) e usando ancora questa disuguaglianza si ha anche

$$\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|.$$

Si conclude $\|T^*\| = \|T\|$.

Esercizio 5 Determinare lo spettro e la norma di U operatore nello spazio vettoriale normato $(C_2([0,\sqrt{\pi}]), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$(Uf)(x) = \cos(x^2) f(x).$$

[punteggio 6]

Per determinare lo spettro di U, iniziamo a studiare

$$\mathrm{Ker}(zI - U) = \{f \in C_2([0,\sqrt{\pi}]) : \ (zI - U)f = 0\}.$$

L'equazione agli autovalori $(zI - U)f = 0$ fornisce

$$(z - \cos(x^2)) f(x) = 0, \qquad x \in [0,\sqrt{\pi}].$$

Se $z \notin [-1,1]$, l'equazione ammette la sola soluzione banale $f = 0$. Se $z \in [-1,1]$, la soluzione è $f(x) = 0$ per $x \neq x_z$, dove x_z è il punto, unico, dell'intervallo $[0,\sqrt{\pi}]$ tale che $\cos(x_z^2) = z$. Per la continuità di f si deve ammettere che l'unica soluzione possibile è ancora $f = 0$. In conclusione $\mathrm{Ker}(zI - U) = \{0\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, cioè $zI - U$ è sempre iniettivo e $\sigma_p(U) = \emptyset$.
Per determinare lo spettro continuo, studiamo

$$\mathrm{Ran}(zI - U) = \{g \in C_2([0,\sqrt{\pi}]) : \ g = (zI - U)f, \ f \in C_2([0,\sqrt{\pi}])\}.$$

Deve risultare

$$f(x) = \frac{g(x)}{z - \cos(x^2)}, \qquad x \in [0,\sqrt{\pi}].$$

Se $z \in [-1,1]$, si ha che f è non continua in $x = x_z$ se g non si annulla in questo punto. Dunque $zI - U$ è iniettivo non suriettivo. Se $z \notin [-1,1]$, $\mathrm{Ran}(zI - U) = C_2([0,\sqrt{\pi})$ e quindi $zI - U$ è invertibile. Concludiamo che $\sigma_c(U) = [-1,1]$.
Per quanto riguarda la norma, $\forall f \in C_2([0,\sqrt{\pi})$ si ha

$$\|Uf\|_2^2 = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left|\cos(x^2) f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \leq \|f\|_2^2$$

da cui si ricava $\|U\| \leq 1$. Dovendo inoltre valere la relazione $\sigma(U) \subset \overline{B}(0,\|U\|)$, si ha anche $1 \leq \|U\|$. In conclusione, $\|U\| = 1$.

Esercizio 6 Determinare la funzione $f(x)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\mathrm{e}^{-|y|}\mathrm{d}y = 2\mathrm{e}^{-|x|} - \mathrm{e}^{-2|x|}.$$

[punteggio 6]

L'integrale proposto è la convoluzione tra la funzione $f(x)$ e la funzione

$$g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$$

la cui trasformata di Fourier vale

$$\mathcal{F}[g](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{2}{1+\lambda^2}.$$

Usando il teorema della convoluzione e la proprietà generale della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}[h(ax)](\lambda) = |a|^{-1}\,\mathcal{F}[h(x)](\lambda/a), \qquad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

possiamo scrivere

$$\mathcal{F}[f](\lambda)\ \mathcal{F}[g](\lambda) = 2\mathcal{F}[g](\lambda) - \frac{1}{2}\mathcal{F}[g](\lambda/2).$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)](\lambda) &= 2 - \frac{1}{2}\frac{2}{1+(\lambda/2)^2}\ \frac{1+\lambda^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{1+(\lambda/2)^2}\ \left[2\left(1+(\lambda/2)^2\right) - (1+\lambda^2)/2\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}[g(x)](\lambda/2)\ \frac{3}{2} \\
&= \mathcal{F}[g(2x)](\lambda)\ \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Applicando la trasformata inversa di Fourier a entrambi i membri segue immediatamente

$$f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2|x|}.$$