Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 1/A

Cesi/Presilla – A.A. 2008–09

Nome	
Cognome	

Canale:	Cesi (Astrofisica)	Presilla (Fisica)

Intendo MANTENERE il voto degli esoneri	1	2

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^3}\, z^n$$

Risp: $R = 0$. Il modo più semplice forse è usare la formula di Stirling per il fattoriale.

(2) (4 pt). Sia A l'insieme di quei valori $z \in \mathbb{C}$ tali che la seguente serie di funzioni è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z-i} \right)^n .$$

Determinare matematicamente l'insieme A e disegnarlo sul piano complesso.

Soluzione. Ponendo $w = (z-1)/(z-i)$ si ottiene la serie geometrica che converge per $|w| < 1$, vale a dire

$$|z-1| < |z-i| .$$

L'insieme A è dunque l'insieme dei punti del piano complesso la cui distanza da 1 è inferiore alla distanza da i. Si tratta del semipiano aperto che si trova al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante.

(3) (4 pt). Trovare e disegnare sul piano complesso le soluzioni dell'equazione $\sin z = 4i/3$. Quante soluzioni cadono all'interno del quadrato di lato 8 centrato nell'origine?

Risp: $z_k = k\pi + i(-1)^k \log 3$, con $k \in \mathbb{Z}$. All'interno del quadrato ci sono 3 soluzioni ($k = -1, 0, 1$).

(4) (5 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=3} \frac{(z-2)^2\,(z+2)}{1-\cos(\pi z)}\, dz$$

Schema di soluzione. Le singolarità dell'integrando si trovano in corrispondenza degli zeri del denominatore, vale a dire

$$\cos(\pi z) = 1 \qquad\qquad z_k = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z} .$$

Sviluppando il denominatore in serie di Taylor nell'intorno di z_k trovo, ponendo $z = z_k + w$,

$$\begin{aligned} 1-\cos(\pi z) &= 1-\cos(\pi(z_k+w)) = 1-\cos(\pi(2k+w)) \\ &= 1-\cos(2k\pi+\pi w) = 1-\cos(\pi w) = \frac{\pi^2\, w^2}{2} + \mathcal{O}(w^4) . \end{aligned}$$

Dunque gli zeri del denominatore hanno tutti molteplicità 2. Gli zeri che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono 3

$$z_{-1} = -2 \qquad z_0 = 0 \qquad z_1 = 2 .$$

Tenendo conto degli zeri del numeratore si possono classificare le singolarità che ci interessano:

-2 è un polo di ordine 1 $\qquad$ 0 è un polo di ordine 2 $\qquad$ $+2$ è una singolarità eliminabile.

Indicando con I il valore dell'integrale e con f l'integrando si ottiene

$$I = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,-2) + \mathrm{Res}(f,0)] = 2\pi i \left[\frac{32}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2} \right] = \frac{48i}{\pi} .$$

(5) (5 pt). Calcolare il seguente integrale. Il risultato è un numero reale e deve essere espresso in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4}$$

Schema di soluzione. Denotando con γ il "solito" cammino chiuso a forma di pacman con la bocca lungo il semiasse reale positivo, si ottiene (se γ contiene tutte le singolarità dell'integrando)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\sqrt{z}^{(+)}\,dz}{z^2 + 2\sqrt{3}z + 4}$$

L'integrale lungo γ si calcola col teorema dei residui. Il risultato è

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} = \pi\sqrt{2}\,\sin(\pi/12) = \pi\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,.$$

(6) (4 pt). Enunciare e dimostrare il Teorema di Morera.

(7) (4 pt). Sia f una funzione analitica sul piano complesso ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Supponiamo che nessuno dei punti z_k coincida con l'origine e sia

$$\alpha := \min_{k=1,\ldots,n} |z_k| > 0\,.$$

Sapendo che $|f(z)| \le 4|z|$ e che $f^{(3)}(0) = 1 + i$, cosa si può aferrmare su α?

Soluzione. Poichè f è analitica sul disco $B_\alpha(0)$, dalla stima di Cauchy ottengo

$$|f^{(3)}(0)| \le \frac{3!\,M_\alpha}{\alpha^3}\,,$$

in cui

$$M_\alpha := \sup_{z\in B_\alpha(0)} |f(z)| \le \sup_{z\in B_\alpha(0)} 4|z| = 4\alpha\,.$$

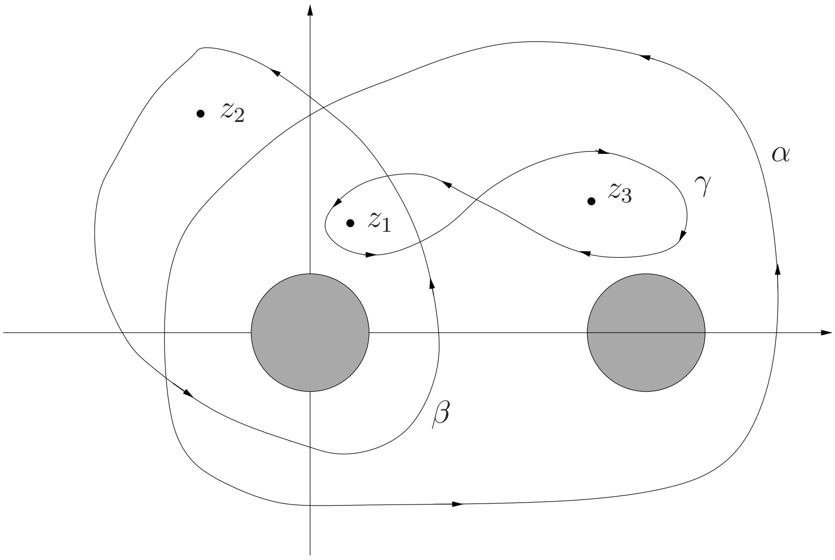
Quindi

$$\sqrt{2} = |1+i| = |f^{(3)}(0)| \le \frac{24}{\alpha^2}\,,$$

da cui si ottiene

$$\alpha \le \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt[4]{2}} = 2\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt{3} = 2^{5/4}\,\sqrt{3}\,.$$

(8) (3 pt). Sia f una funzione analitica su $\mathbb{C}$ ad eccezione delle singolarità isolate z_1, z_2, z_3 e dei due dischi indicati in figura. Non abbiamo alcuna informazione sul comportamento di f all'interno dei due dischi. Esprimere le quantità $\int_\alpha f$, $\int_\beta f$ e $\int_\gamma f$ in termini di opportuni residui (incluso, se necessario, il residuo all'infinito). Se le informazioni non sono sufficienti a determinare il valore dell'integrale scrivere: non calcolabile.



Risp:

$\int_\alpha f = -2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,\infty) + \mathrm{Res}(f,z_2)]$.

$\int_\beta f =$ non calcolabile.

$\int_\gamma f = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,z_1) - \mathrm{Res}(f,z_3)]$.

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 1/B

Cesi/Presilla – A.A. 2008–09

Nome	
Cognome	

Canale:	Cesi (Astrofisica)	Presilla (Fisica)

Intendo MANTENERE il voto degli esoneri	3	4

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (5 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Scrivere, oltre alla formula completa, lo sviluppo esplicito di f fino a $k = 4$, vale a dire

$$\begin{aligned} f(x) \sim \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + a_4 \cos(4x) \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x) + \cdots \end{aligned}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2} \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, \cos(kx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x\, \sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx \\ &= \frac{1}{k^2\pi} \big[\cos(kx)\big]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2\pi} \big[\cos(k\pi) - 1\big] = \frac{1}{k^2\pi} \big[(-1)^k - 1\big]\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$a_{2k} = 0 \qquad\qquad a_{2k+1} = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\,.$$

Per quanto riguarda i b_k

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, \sin(kx)\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x\, \cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx)\, dx \\ &= -\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2\pi} \big[\sin(kx)\big]_0^{\pi} = -\frac{1}{k} \cos(k\pi) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,. \end{aligned}$$

Posso quindi scrivere

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, \sin(kx)\,.$$

Lo sviluppo esplicito fino a $k = 4$ è

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \cdots\,.$$

(2) (2+3+2=7 pt). Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx = \Big(x_2, \frac{x_1}{2}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_3}{4}, \frac{x_6}{5}, \frac{x_5}{6}, \ldots\Big)$$

(a) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$
(b) Trovare gli autovalori di T. Per ogni autovalore esibire un autovettore corrispondente. Scrivere esplicitamente i 4 autovalori più grandi in modulo e, per ognuno di essi, un autovettore corrispondente.
(c) Dire se $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2 (dimostrare).

Risp.

(a)

$$T^*x = \Big(\frac{x_2}{2}, x1, \frac{x_4}{4}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_6}{6}, \frac{x_5}{5}, \ldots\Big)$$

(b) L'insieme degli autovalori è

$$\sigma_p(T) := \Big\{\lambda_k^{\pm} := \pm\frac{1}{\sqrt{2k(2k-1)}} : k = 1, 2, 3, \ldots\Big\}.$$

Autovettori corrispondenti a λ_k^+ e λ_k^- sono

$$u_k^+ = (0, 0, \ldots, 0, \sqrt{2k}, \sqrt{2k-1}, 0, 0, \ldots)$$
$$u_k^- = (0, 0, \ldots, 0, \sqrt{2k}, -\sqrt{2k-1}, 0, 0, \ldots)$$

in cui gli unici due elementi non nulli occupano le posizioni $2k-1$ e $2k$. I 4 autovalori più grandi in modulo, con rispettivi autovettori sono

$$\lambda_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u_1^+ = (\sqrt{2}, 1, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$\lambda_1^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u_1^- = (\sqrt{2}, -1, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$\lambda_2^+ = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad u_2^+ = (0, 0, 2, \sqrt{3}, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$\lambda_2^- = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad u_2^- = (0, 0, 2, -\sqrt{3}, 0, 0, 0, \ldots)$$

(c) Si dimostra facilmente che $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$, quindi $\overline{\operatorname{Ran} T} = \ell_2$, vale a dire $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2.

(3) (4 pt). Sia $V = C_2[0,1]$ e $W = \operatorname{span}\{1, x^2\}$. Calcolare $\pi_W(x^n)$ con n intero non negativo. Verificare che la formula ottenuta dia il risultato giusto per $n = 0, 2$.

Schema di soluzione. Poniamo $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Ortogonalizzando i vettori 1 e x^2 trovo

$$w_1(x) = 1 \qquad \|w_1\|^2 = 1$$
$$w_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \qquad \|w_2\|^2 = \frac{4}{45}.$$

La proiezione di x^n su W è data da

$$\begin{aligned}\pi_W(x^n) &= \frac{\langle x^n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1(x) + \frac{\langle x^n, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2(x) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{15n}{2(n^2+4n+3)}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che $\pi_W(1) = 1$ e $\pi_W(x^2) = x^2$.

(4) (4 pt). Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel.

(5) (2 pt). Fare un esempio specifico e concreto di una funzione $f \in L_1(\mathbb{R})$ la cui trasformata di Fourier appartiene a $C^3(\mathbb{R})$ ma non a $C^4(\mathbb{R})$.

Risp: $f(x) = \frac{x}{1+x^6}$.

(6) (2 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato.

$$D^4\big(e^{-x^2}\,\delta_0''\big)$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
D^4\big(e^{-x^2}\,\delta_0''\big) &= D^4\left[\,e^{-x^2}|_{x=0}\,\delta_0'' - 2\,D(e^{-x^2})|_{x=0}\,\delta_0' + D^2(e^{-x^2})|_{x=0}\,\delta_0\,\right]\\
&= D^4\left[\,e^{-x^2}|_{x=0}\,\delta_0'' - 2\,\big(-2x\,e^{-x^2}\big)|_{x=0}\,\delta_0' + \big((4x^2-2)e^{-x^2}\big)|_{x=0}\,\delta_0\,\right]\\
&= D^4\left[\,\delta_0'' - 2\delta_0\,\right] = \delta_0^{(6)} - 2\delta_0^{(4)}\,.
\end{aligned}$$

(7) (2 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(2x))\,dx$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \sin(2x)$ si annulla nei punti

$$\sin(2x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x_k = \frac{k\pi}{2}\text{ con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$|b'(x_k)| = |2\,\cos(2x_k)| = |2\cos(k\pi)| = |2\,(-1)^k| = 2\,,$$

si ottiene

$$\delta(\sin(2x)) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\kappa\pi/2}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(2x))\,dx &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(x-\kappa\pi/2)\,dx\\
= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\pi/2|} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\pi/2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-e^{-\pi/2}} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(8) (4 pt). Dimostrare le seguenti affermazioni (se l'affermazione è vera), o esibire un controesempio (se è falsa). Nel seguito V è uno spazio di Hilbert e S e T sono operatori lineari limitati arbitrari su V.

(a) Se S e T sono suriettivi allora $S+T$ è suriettivo.
(b) Se $\|S\| \le \|T\|$ allora $\|S^2\| \le \|T^2\|$.

Soluzione.

(a) Falso. Si prenda $S = I$ e $T = -I$. S e T sono ovviamente suriettivi, ma $S+T = 0$ non lo è.
(b) Falso. Nello spazio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ consideriamo le matrici

$$S = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad\qquad T = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dato $x = (x_1, x_2)$ si ha $Tx = (2x_2, 0)$, quindi $\|T\| = 2$, mentre ovviamente $\|S\| = 1$. Però $S^2 = S$, quindi $\|S^2\| = 1$, mentre $T^2 = 0$ e dunque $\|T^2\| = 0$.

(9) (3 pt). Dimostrare che, se p e q sono due numeri reali tali che $1 \leq p < q$, si ha $C_p(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}) \subset C_q(\mathbb{R})$.

Soluzione. Sia $f \in C_p(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$ e sia $M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, |f(x)|^{q-p} \, dx \leq M^{q-p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \, .$$

Poichè $f \in C_p(\mathbb{R})$ l'ultimo integrale è finito.