MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2014/2015 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 15 luglio 2015

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cos(\sqrt{z}) = 0.$$

[punteggio 5]

Posto $w = \sqrt{z}$, si ha

$$\frac{e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}}{2} = 0$$

ovvero

$$\left(e^{\mathrm{i}w}\right)^2 = -1$$

che fornisce

$$\mathrm{i}w = \log(\pm\mathrm{i}) = \log\left(1e^{\pm\mathrm{i}\pi/2}\right) = \ln 1 + \mathrm{i}(\pm\pi/2 + 2k\pi), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

In conclusione, si ha

$$\sqrt{z} = (2n+1)\pi/2, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e quindi le radici cercate sono

$$z = ((2n+1)\pi/2)^2 \qquad n = 0, 1, 2, \dots.$$

<u>Esercizio 2</u> Sia $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ \pi < x < 2\pi\}$. Determinare se, nello spazio metrico $(\mathbb{Q}, d)$ con $d(x, y) = |x - y|$, l'insieme A risulta totalmente limitato.

[punteggio 5]

A è totalmente limitato. Si consideri infatti lo spazio metrico (A, d) e sia $\varepsilon > 0$ un arbitrario numero reale. Si considerino poi gli n intervalli reali $[y_k, y_{k+1}]$ dove $y_k = \pi + k\varepsilon$ con $k = 1, 2, \ldots, n$ e $n = (2\pi - \pi)/\varepsilon$. Detto x_k un qualsiasi numero razionale tale che $x_k \in (y_k, y_{k+1})$, e posto $B(x_k, \varepsilon) = \{x \in A : \ d(x, x_k) < \varepsilon\}$ risulta $A = \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.

Esercizio 3 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare il residuo in $z = 0$ della funzione

$$\frac{1}{z}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^{1/z^2}.$$

[punteggio 6]

Usando gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad |z| < \infty,$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \qquad |z| < 1,$$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad |z| < \infty,$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^{1/z^2} &= \frac{1}{z}\exp\left(\frac{1}{z^3}\log\left(\frac{\sin z}{z}\right)\right) \\
&= \frac{1}{z}\exp\left(\frac{1}{z^2}\log\left(1+\left(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\dots\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{z}\exp\left(\frac{1}{z^2}\left(\left(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\dots\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. -\frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\dots\right)^2+\dots\right)\right) \\
&= \frac{1}{z}\exp\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{180}z^2-\frac{1}{2835}z^4+\dots\right) \\
&= \frac{1}{z}\exp\left(-\frac{1}{6}\right)\exp\left(-\frac{1}{180}z^2-\frac{1}{2835}z^4+\dots\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}z}\left(1+\left(-\frac{1}{180}z^2-\frac{1}{2835}z^4+\dots\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{180}z^2-\frac{1}{2835}z^4+\dots\right)^2+\dots\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}z}-\frac{z}{180\sqrt[6]{\mathrm{e}}}-\frac{17z^3}{50400\sqrt[6]{\mathrm{e}}}+O(z^5).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^{1/z^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}}.$$

Esercizio 4 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z,$$

dove γ è il perimetro del triangolo di vertici $1-\mathrm{i}$, i, $-1-\mathrm{i}$ percorso in verso antiorario.

[punteggio 6]

Posto $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, il ramo principale di $F(z) = 2\sin(z^{1/2}) = 2\sin(r^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2})$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}2\sin(z^{1/2}) = \cos(z^{1/2})z^{-1/2}.$$

La curva lungo la quale deve essere valutato l'integrale interseca l'asse di diramazione della funzione $F(z)$ nel punto $-1/2$. Detto allora $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, il cammino orientato positivamente tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = -1/2$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sin(z^{1/2})\Big|_{z=\gamma(\varepsilon)}^{z=\gamma(1-\varepsilon)} \\
&= \Big(2\sin(\sqrt{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}) - 2\sin(\sqrt{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2})\Big) \\
&= 2\sin(\mathrm{i}\sqrt{1/2}) - 2\sin(-\mathrm{i}\sqrt{1/2}) \\
&= 4\sin(\mathrm{i}\sqrt{1/2}) \\
&= 4\mathrm{i}\sinh\sqrt{1/2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione avente un polo di ordine β nel punto b e sia $g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ analitica in b. Dimostrare che

$$\operatorname*{Res}_{z=b} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = -\beta g(b).$$

[punteggio 5]

Se f ha in b un polo di ordine β, allora $f(z) = h(z)(z-b)^{-\beta}$ con h analitica e non nulla in b. Pertanto

$$\begin{aligned} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z)\frac{h'(z)(z-b)^{-\beta} - h(z)\beta(z-b)^{-\beta-1}}{h(z)(z-b)^{-\beta}} \\ &= \frac{g(z)h'(z)}{h(z)} - \frac{\beta}{z-b}g(z). \end{aligned}$$

Poiché g e gh'/h sono analitiche in b, la funzione gf'/f ha un polo semplice in b con

$$\operatorname*{Res}_{z=b} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = -\beta g(b).$$

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{(4+x^2)^2}\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R},$$

specificando per quali valori di a l'integrale risulta convergente.

[punteggio 6]

Posto $f(z) = \mathrm{e}^{(1-a)\log z}/(4+z^2)^2$, avendo assunto per il logaritmo il ramo

$$\log z = \ln r + \mathrm{i}\theta, \qquad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

si osservi che f ha poli doppi in $z = \pm 2\mathrm{i}$ e una linea di diramazione coincidente con il semiasse reale positivo. Si integri f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove $\lambda_1(x) = x + \mathrm{i}0$, $r \le x \le R$, $\gamma_R(\theta) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, $\lambda_2(x) = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, $R \ge x \ge r$, e $\gamma_r(\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\pi \ge \theta \ge 0$. Per $R > 2$ e $r < 2$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=2\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\log z}/(z+2\mathrm{i})^2}{(z-2\mathrm{i})^2} \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\log z}}{(z+2\mathrm{i})^2} \right|_{z=2\mathrm{i}} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\ a2^{-4-a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi/2}.
\end{aligned}$$

Gli integrali sui cammini che compongono γ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)(\ln x + \mathrm{i}0)}}{((x\mathrm{e}^{\mathrm{i}0})^2+4)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\mathrm{d}x = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln x}}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^r \frac{\mathrm{e}^{(1-a)(\ln x + \mathrm{i}\pi)}}{((x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^2+4)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi} \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln x}}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z \right| \le \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln R}}{(R^2-4)^2}\ \pi R = \frac{\pi R^{2-a}}{(R^2-4)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \qquad \text{se } a > -2,$$

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z \right| \le \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln r}}{(4-r^2)^2}\ \pi r = \frac{\pi r^{2-a}}{(4-r^2)^2} \xrightarrow{r\to 0} 0, \qquad \text{se } a < 2.$$

Prendendo i limiti $R \to \infty$ e $r \to 0$, per $-2 < a < 2$ si conclude

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\ a2^{-4-a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi/2}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi}} \\
&= \pi a 2^{-4-a}\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\pi/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\pi/2}} \\
&= \frac{a\pi 2^{-4-a}}{\sin(a\pi/2)}.
\end{aligned}$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2014/2015 – Prof. C. Presilla

Prova B2 – 15 luglio 2015

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Sia $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ una successione di ℓ_1. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_1 = 0$ implica $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_\infty = 0$. Portare un esempio che il viceversa è falso.

[punteggio 5]

Poiché $x^{(n)} \in \ell_1$, si ha $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \infty$. Se $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_1 = 0$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| = 0.$$

D'altro canto

$$0 \le \|x^{(n)}\|_\infty = \sup_{k\ge 1} |x_k^{(n)}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|.$$

Prendendo il limite $n \to \infty$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_\infty = 0.$$

Per dimostrare che l'implicazione opposta è falsa, si consideri la successione

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1/n & k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Evidentemente risulta $x^{(n)} \in \ell_1$ con

$$\|x^{(n)}\|_\infty = \sup_{k\ge 1} |x_k^{(n)}| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

D'altro canto per ogni n si ha

$$\|x^{(n)}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| = 1$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_1 \neq 0$.

Esercizio 2 Sia F il funzionale lineare su $(C([0,1], \|\cdot\|_u)$ definito da

$$F(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - f(0).$$

Determinare $\|F\|$.

[punteggio 5]

Per ogni $f \in C[0,1]$ risulta

$$|F(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - f(0)\right| \leq \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| + |f(0)| \leq \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + |f(0)|$$
$$\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \int_0^1 \mathrm{d}x + |f(0)| \leq 2\|f\|_u$$

e quindi

$$\|F\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|_u} \leq 2.$$

D'altro canto si consideri la successione $(f_n)_{n=1}^\infty$ di funzioni $f_n \in C[0,1]$ definite come

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 + 2nx & -1 \leq x \leq 1/n \\ 1 & 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

Risulta

$$F(f_n) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - f(0) = \int_{1/n}^1 1\mathrm{d}x - (-1) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\|f_n\|_u = \int_0^{1/n} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n}$$

e quindi

$$\frac{|F(f_n)|}{\|f_n\|_u} = \frac{2-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{2n}} \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

che implica $\|F\| \geq 2$. Concludiamo che $\|F\| = 2$.

Esercizio 3 Dimostrare che per $n \to \infty$ la successione di distribuzioni regolari $(P(\sin(nx)/x))_{n=1}^{\infty}$ converge alla distribuzione $\pi\delta_0$. Si ricordi che $\int_{\mathbb{R}} x^{-1}\sin(x)\mathrm{d}x = \pi$.

[punteggio 6]

La distribuzione $P(\sin(nx)/x)$ è definita dalla seguente relazione

$$P(\sin(nx)/x)(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x, \qquad f \in \mathcal{K}.$$

Sia $\operatorname{supp} f = [-a, a]$. Poiché f è derivabile si ha

$$f(x) = f(0) + xf'(\xi(x)), \qquad x \in [-a, a], \quad \xi(x) \in (-a, a),$$

pertanto

$$P(\sin(nx)/x)(f) = f(0)\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} \sin(nx)f'(\xi(x))\mathrm{d}x.$$

Il primo integrale che compare in questa espressione vale π mentre il secondo si annulla nel limite $n \to \infty$ in virtù del lemma di Riemann–Lebesgue applicato a $f'(\xi(x)) = (f(x) - f(0))/x \in L_1[-a, a]$. In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} P(\sin(nx)/x)(f) = \pi f(0)$$

che, per l'arbitrarietà di $f \in \mathcal{K}$, implica

$$P(\sin(nx)/x) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} \pi\delta_0.$$

Esercizio 4 Sia P una proiezione ortogonale sullo spazio Euclideo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. a) Enunciare quali sono le proprietà che caratterizzano P e quindi dimostrare che b) $\|Pv\| \leq \|v\|$ $\forall v \in V$ e c) $\operatorname{Ran} P = \operatorname{Ker}(I - P)$.

[punteggio 5]

---

a) L'operatore P è una proiezione ortogonale se $P^* = P$ e $P^2 = P$.
b) Utilizzando le proprietà di P e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, $\forall v \in V$ si ha

$$\begin{aligned}\|Pv\|^2 &= \langle Pv, Pv\rangle = \langle P^* v, Pv\rangle = \langle v, PPv\rangle = \langle v, Pv\rangle \\ &\leq \sqrt{\langle v, v\rangle \langle Pv, Pv\rangle} = \|v\|\|Pv\|.\end{aligned}$$

Per $\|Pv\| \neq 0$, segue

$$\|Pv\| \leq \|v\|.$$

La disuguaglianza è infine banalmente vera per $\|Pv\| = 0$.
c) Risulta $\operatorname{Ran} P \subset \operatorname{Ker}(I - P)$. Infatti, sia $v \in \operatorname{Ran} P$, allora $\exists u \in V$ tale che $v = Pu$. Segue $Pv = P(Pu) = P^2 u = Pu = v$, cioè $(I - P)v = 0$ che implica $v \in \operatorname{Ker}(I - P)$.
Risulta $\operatorname{Ker}(I-P) \subset \operatorname{Ran} P$. Infatti, sia $v \in \operatorname{Ker}(I-P)$, allora $(I-P)v = 0$. Segue $v = Pv$ con $v \in V$ che implica $v \in \operatorname{Ran} P$.
Dalle due inclusioni segue $\operatorname{Ran} P = \operatorname{Ker}(I - P)$.

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (\frac{x_2}{2^1}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_4}{2^3}, \frac{x_4}{2^4}, \frac{x_6}{2^5}, \frac{x_6}{2^6}, \dots).$$

Determinare lo spettro di T.

[punteggio 6]

Determiniamo $\mathrm{Ker}(zI - T) = \{x \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ (zI - T)x = 0\}$ al variare di $z \in \mathbb{C}$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)x = 0$ implica

$$\frac{x_{2k}}{2^{2k-1}} = zx_{2k-1}, \qquad \frac{x_{2k}}{2^{2k}} = zx_{2k}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Se $z = 0$, questo sistema di equazioni è soddisfatto per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ tale che $x_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Dunque $z = 0$ è un autovalore di T infinitamente degenere.
Se $z = 1/2^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$, l'equazione $(zI - T)x = 0$ ammette la soluzione x non banale con componenti $x_{2n-1} = 2x_{2n} \neq 0$ e $x_k = 0$ per $k \neq 2n, 2n-1$. Dunque anche $z = 1/2^{2n}$ sono autovalori di T infinitamente degeneri.
Se $z \neq 0$ e $z \neq 1/2^{2n}$, l'unica soluzione dell'equazione $(zI - T)x = 0$ è quella banale $x = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo, ovvero z non è autovalore. Riepilogando, $\sigma_p(T) = \{0, 1/2^{2n}, \ n = 1, 2, \dots\}$.
Studiamo ora $\mathrm{Ran}(zI - T) = \{y \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ y = (zI - T)x, \ x \in \ell_2(\mathbb{C})\}$ al variare di $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$. Affinchè $(zI - T)x = y$, deve essere

$$zx_{2k-1} - \frac{x_{2k}}{2^{2k-1}} = y_{2k-1}, \qquad zx_{2k} - \frac{x_{2k}}{2^{2k}} = y_{2k}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Se $z \neq 0$ e $z \neq 1/2^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$, dalla seconda equazione si ha $x_{2k} = y_{2k}/(z - 1/2^{2k})$ e dalla prima $x_{2k-1} = y_{2k-1}/z + y_{2k}/(z2^{2k-1}(z - 1/2^{2k}))$, $k = 1, 2, \dots$. Da queste segue che esiste $c > 0$, dipendente da z, tale che $\|x\|_2^2 \leq c\|y\|_2^2$, cioè $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ se $y \in \ell_2(\mathbb{C})$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile. Riepilogando, $\sigma_c(T) = \emptyset$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$h(x) = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|x-y|}\mathrm{d}y.$$

Suggerimento: si scriva $h(x)$ come un integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di ....

[punteggio 6]

Si osservi che

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y,$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}.$$

Le trasformate di Fourier di f e g sono

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{2\sin\lambda}{\lambda}$$

$$\mathcal{F}[g](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{2}{1+\lambda^2}.$$

Poiché $h(x) = (f * g)(x)$ è il prodotto di convoluzione delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, la sua trasformata di Fourier è

$$\mathcal{F}[h](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)\mathcal{F}[g](\lambda) = \frac{4\sin\lambda}{\lambda(1+\lambda^2)}$$