Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 2/A

Cesi/Presilla – A.A. 2007–08

Nome	
Cognome	

Il voto dello scritto sostituisce gli esoneri	1	2

Devo verbalizzare il primo modulo da 4 crediti?	S	N

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\,(2n)!}{(n!)^2}\, z^n$$

Soluzione. $R = 1/4$. Infatti, posto $a_n = n^2(2n)!/(n!)^2$, si ha

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^2(2n)!}{n!n!}\,\frac{(n+1)!(n+1)!}{(n+1)^2(2n+2)!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+10)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}$$

(2) (4 pt). Per quali valori di z la seguente serie è convergente?

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$$

Soluzione. Osservando che $e^{nz} = (e^z)^n$ si riconosce che la serie considerata è una serie geometrica di ragione e^z. La serie quindi converge quando $|e^z| < 1$. Posto $z = x + iy$, la precedente disugualianza è equivalente a $e^x < 1$, cioè $x < 0$. In conclusione, la serie considerata converge $\forall z \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re} z < 0$.

(3) (4 pt). Fare un esempio specifico e concreto (se l'oggetto non esiste dire che non esiste e spiegare il perchè) di:

(a) Una funzione f analitica sull'anello $A := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ che non ammette una primitiva su A.

(b) Una funzione analitica che mappa biunivocamente A su B in cui:

$$A := \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2,\ 0 \le \mathrm{Arg}\, z \le \pi/2\} \quad B := \{z \in \mathbb{C} : 1 \le \mathrm{Re}\, z \le 2,\ 0 \le \mathrm{Im}\, z \le \frac{\pi}{2\log 2}\}\,.$$

Soluzione.
(a) La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

ammette come primitiva uno qualsiasi dei rami di

$$F(z) = \log(z)$$

nel dominio di analiticità del ramo considerato. In nessun caso tale dominio di analiticità copre l'intero anello A.

La primitiva su tutto A non può esistere. Infatti, se esistesse, si avrebbe, ad esmpio

$$\int_{|z|=3/2} \frac{dz}{z} = 0\,,$$

mentre si calcola facilmente

$$\int_{|z|=3/2} \frac{dz}{z} = 2\pi i\,.$$

(b) Il ramo principale di

$$f(z) = 1 + \frac{\log z}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z}{\ln 2}$$

mappa biunivocamente A su B. Infatti f è analitica in A e posto $z = re^{i\theta}$ per $1 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le \pi/2$ si ha $1 \le \mathrm{Re}\, f \le 2$ e $0 \le \mathrm{Im}\, f \le \pi/(2\ln 2)$.

(4) (5 pt). Sia $u : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione armonica tale che $u(z) \geq 3$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare che u è costante.

Soluzione. Sia $v : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione armonica coniugata a u. La funzione $f = u + iv$ è analitica in $\mathbb{C}$. Allora anche la funzione $g = \exp(-f)$ è intera. Inoltre, poiché $|\exp(-f)| = \exp(-u)$ e $u \geq 3$, la funzione g è anche limitata in $\mathbb{C}$. Per il teorema di Liouville essa è pertanto costante in $\mathbb{C}$. Si conclude che anche $u = -\ln|g|$ è costante in $\mathbb{C}$.

(5) (6 pt). Trovare tutte le singolarità isolate di f. Per ciascuna di esse determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine) e calcolare il residuo

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z}\,.$$

Soluzione. Si osservi che $\sin z = 0$ nei punti $z_n = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Per $n \neq 0$, $z^2 \sin z$ ha uno zero semplice in z_n e e^{z_n} è diverso da zero. Quindi f ha in z_n un polo semplice con

$$\operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) = \left.\frac{e^z}{2z\sin z + z^2\cos z}\right|_{z=z_n} = (-1)^n \frac{e^{n\pi}}{n^2\pi^2}$$

In z_0, $z^2 \sin z$ ha uno zero triplo e $e^{z_0} \neq 0$. Pertanto f ha in z_0 un polo di ordine 3. Il corrispondente residuo si trova facilmente sviluppando f in serie di Laurent nella regione $0 < |z| < \pi$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 + z + z^2/2 + \dots}{z^2(z - z^3/6 + \dots)} \\ &= \frac{1}{z^3}(1 + z + z^2/2 + \dots)(1 + z^2/6 + \dots) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{3z} + \dots \end{aligned}$$

da cui si conclude che

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{2}{3}$$

(6) (5 pt). Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2\,dz}{e^{\pi z} + 1} \qquad \gamma(t) := 1 + 2i + 2e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Soluzione. Si osservi che il cammino di integrazione è il cerchio di raggio 2, centrato nel punto $1+2i$ e orientato positivamente. La funzione integranda ha poli semplici in corrispondenza degli zeri semplici di $e^{\pi z} + 1$. Tali zeri sono $z_k = i(1 + 2k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Per il teorema dei residui si conclude

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{z^2\,dz}{e^{\pi z} + 1} &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{z^2}{e^{\pi z} + 1} + \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z^2}{e^{\pi z} + 1} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{z_0^2}{\pi e^{\pi z_0}} + \frac{z_1^2}{\pi e^{\pi z_1}} \right) \\ &= 20i \end{aligned}$$

(7) (5 pt). *ATTENZIONE: Questo esercizio NON deve essere svolto da chi verbalizza il primo modulo da 4 crediti.*[1] Si consideri l'integrale

$$I := \int_0^\infty \frac{x\,\sin x\,dx}{x^4 + 1}\,.$$

[1] Il totale verrà normalizzato a 33

(a) Scrivere chiaramente la relazione che lega la quantità I al valore di alcuni residui di un'opportuna funzione complessa

(b) Calcolare I semplificando il risultato il più possibile.

Soluzione.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^4+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^4+1}dz \qquad\qquad \gamma_R=[-R,R]+Re^{it}\ t\in[0,\pi] \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}+\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

dove $z_k=e^{i(\pi+2\pi k)/4}$, $k=0,1,2,3$, sono le 4 soluzione distinte di $z^4+1=0$. Nei poli semplici z_0 e z_1 (quelli che si itrovano all'interno del cammino di integrazione γ) i residui valgono

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}=\frac{z_0e^{iz_0}}{4z_0^3}=\frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}(\cos(1/\sqrt{2})+i\sin(1/\sqrt{2}))$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}=\frac{z_1e^{iz_0}}{4z_1^3}=-\frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}(\cos(1/\sqrt{2})-i\sin(1/\sqrt{2}))$$

e pertanto

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[2\pi i\frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}\Big(\cos(1/\sqrt{2})+i\sin(1/\sqrt{2})-\cos(1/\sqrt{2})+i\sin(1/\sqrt{2})\Big)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\sin(1/\sqrt{2})e^{-1/\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 2/B

Cesi/Presilla – A.A. 2007–08

Nome	
Cognome	

Il voto dello scritto sostituisce gli esoneri	3	4

Devo verbalizzare l'intero corso da 8 crediti?	S	N

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f appartiene a $C_2(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx < \infty$).

$$(a)\quad f(x) := \frac{e^{-\alpha\sqrt{|x|}}}{(1+|x|)^\alpha} \qquad\qquad (b)\quad f(x) := \frac{\left[\,\log(1+x^6)\,\right]^\alpha}{(4+x^2)^\alpha}$$

Risp: (a) $\alpha > 0$. (b) $\alpha > 1/4$.

(2) (3 pt). Dire se l'insieme di tutte le successioni reali $(x_k)_{k=1}^\infty$ che soddisfano la condizione

$$\sum_{k=1}^\infty k\,x_k^2 < \infty$$

costituisce uno spazio vettoriale (dimostrare ciò che si afferma).

Soluzione. Sia

$$V := \left\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{k=1}^\infty k x_k^2 < \infty\right\}.$$

V é uno spazio vettoriale. Poichè V è un sottoinsieme dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^\infty$ di tutte le successioni reali è sufficiente far vedere che V è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Siano $x, y \in V$. Faccio vedere che $x + y \in V$. Utilizzando la disuguaglianza $2ab \le a^2 + b^2$ valida per $a, b \in \mathbb{R}$ ottengo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty k(x_k+y_k)^2 &= \sum_{k=1}^\infty k(x_k^2+y_k^2+2x_ky_k) \le 2\sum_{k=1}^\infty k(x_k^2+y_k^2)\\ &= 2\sum_{k=1}^\infty kx_k^2 + 2\sum_{k=1}^\infty ky_k^2 < \infty\,,\end{aligned}$$

quindi $x + y \in V$.

Sia ora $x \in V$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$\sum_{k=1}^\infty k(cx_k)^2 = c^2\sum_{k=1}^\infty kx_k^2 < \infty\,,$$

per cui $cx \in V$. □

(3) (4 pt). Sia $V := C_2[0,\pi]$ con il prodotto scalare canonico e sia $W := \operatorname{span}\{1, \sin x\}$. Scomporre la funzione $f(x) := x$ come somma di 2 termini $f = g + h$ con $g \in W$ e $h \in W^\perp$.

Schema di soluzione. Poniamo $\langle f, g\rangle := \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$. Ortogonalizzando i vettori 1 e $\sin x$ trovo

$$\begin{aligned} w_1(x) &= 1 & \|w_1\|^2 &= \pi\\ w_2(x) &= \sin x - \frac{2}{\pi} & \|w_2\|^2 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\,.\end{aligned}$$

La proiezione su W è data da

$$\begin{aligned} g = \pi_W(x) &= \frac{\langle x, w1\rangle}{\|w_1\|^2}\,w_1(x) + \frac{\langle x, w2\rangle}{\|w_2\|^2}\,w_2(x)\\ &= \frac{\langle x, 1\rangle}{\pi} + \frac{\langle x, (\sin x - 2/\pi)\rangle}{\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}}\left(\sin x - \frac{2}{\pi}\right).\end{aligned}$$

Poichè si ha $\langle x, 1\rangle = \pi^2/2$ e $\langle x, \sin x\rangle = \pi$ il secondo termine della precedente uguaglianza è nullo e si ottiene dunque

$$g = \frac{\langle x, 1\rangle}{\pi} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Infine il termine ortogonale a W è dato da

$$h = f - g = x - \frac{\pi}{2}\,.$$

(4) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$$(a)\;\; D^2[\,\sin(|x|)\,] \qquad\qquad (b)\;\; D^3[\,x\,e^{2x}\delta_0''\,] \qquad\qquad (c)\;\; D[\,e^{-x^2}\,\lfloor x\rfloor\,]$$

Soluzione.

(a) Utilizzando la relazione $D[g(|x|)] = g'(|x|)\operatorname{sgn}(x)$ e il fatto che il coseno è pari per cui $\cos(|x|) = \cos x$ si ottiene

$$\begin{aligned} D^2[\,\sin(|x|)\,] &= D[\cos(|x|)\operatorname{sgn}(x)] = D[\cos(x)\operatorname{sgn}(x)] \\ &= -\sin(x)\operatorname{sgn}(x) + 2\cos(x)\delta_0 = -\sin(|x|) + 2\delta_0\,. \end{aligned}$$

(b) Poichè

$$xe^{2x}\delta_0'' = \sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{n}{k}\left[D^k(xe^{2x})\right]_{x=0}\delta_0^{(n-k)} = -2\delta_0' + 4\delta_0\,,$$

ottengo

$$D^3[\,x\,e^{2x}\delta_0''\,] = 4\delta_0^{(3)} - 2\delta_0^{(4)}\,.$$

(c) Si ha

$$D[\,e^{-x^2}\,\lfloor x\rfloor\,] = -2xe^{-x^2}\lfloor x\rfloor + e^{-x^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k = -2xe^{-x^2}\lfloor x\rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2}\delta_k\,.$$

(5) (4 pt) Sia V uno spazio di Hilbert complesso e sia $T \in \mathcal{L}(V)$. Dimostrare che

(a) $\sigma(T^*) = \{\bar z : z \in \sigma(T)\}$
(b) $R_z(T)^* = R_{\bar z}(T^*)$ per ogni $z \in \rho(T)$

Soluzione. Per definizione il numero complesso z appartiene all'insieme risolvente di T^* se $(zI - T^*)$ è invertibile. Inoltre ricordo che S è invertibile se e solo se S^* è invertibile e, in questo caso, si ha $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$. Posso scrivere allora la seguente catena di coimplicazioni

$$\begin{aligned} z \in \rho(T^*) &\Leftrightarrow (zI - T^*) \text{ è invertibile} \Leftrightarrow (\bar z I - T)^* \text{ è invertibile} \\ &\Leftrightarrow (\bar z I - T) \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \bar z \in \rho(T). \end{aligned}$$

Questo mi dice che $\rho(T^*) = \{\bar z : z \in \rho(T)\}$. Passando ai complementi ottengo (a). Inoltre se $z \in \rho(T)$,

$$R_z(T)^* = [(zI - T)^{-1}]^* = [(zI - T)^*]^{-1} = [\bar z I - T^*]^{-1} =: R_{\bar z}(T^*)\,.$$

(6) (3 pt). Dimostrare che l'operatore derivata D è illimitato nello spazio $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$.[2]

Suggerimento per la soluzione. Si consideri la successione nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ data da

$$f_n(x) := e^{-nx^2}\,.$$

[2] $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni *rapidamente decrescenti*

(7) (4 pt). Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel.

(8) (5 pt). *ATTENZIONE: Questo esercizio NON deve essere svolto da chi verbalizza l'intero corso da 8 crediti.*[3] Disegnare il grafico e sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < \pi/2 \\ |x| - \pi/2 & \text{se } |x| \geq \pi/2. \end{cases}$$

Scrivere, oltre allo sviluppo completo, tutti i termini fino a $k = 7$ *in modo esplicito*, vale a dire

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \cdots + a_7 \cos(7x) + \cdots$$

Calcolo i coefficienti della serie di Fourier

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\pi}{4} \\ a_k &= \frac{2}{\pi k^2} \Big[(-1)^k - \cos(k\pi/2)\Big] \\ b_k &= 0\,. \end{aligned}$$

Poichè

$$\cos(k\pi/2) = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } k = 2n \\ 0 & \text{se } k = 2n-1 \end{cases}$$

posso scrivere

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{1}{2\pi n^2} \left[1 - (-1)^n\right] \\ a_{2n-1} &= -\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\,. \end{aligned}$$

Il termine a_{2n} è diverso da zero solo se n è dispari $n = 2j - 1$, quindi può essere riscritto come

$$a_{4j-2} = \frac{1}{\pi(2j-1)^2}\,.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \Big[-\frac{2\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2} + \frac{\cos[(4k-2)x]}{(2k-1)^2}\Big] \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{\cos(2x)}{\pi} - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) - \frac{2}{25\pi}\cos(5x) + \frac{1}{9\pi}\cos(6x) - \frac{2}{49\pi}\cos(7x) + \cdots \end{aligned}$$

[3] Il totale verrà normalizzato a 33