MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova Finale 16 Luglio 2010 - ANALISI COMPLESSA

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} z^n, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{1+n+n^2+n^3}$$

[punteggio 5]

a) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} \frac{(3n+4)!}{(3n+3)! + 4^{n+1}} \\ &= \frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)[1 + 4^n/(3n)!]}{(3n+3)(3n+2)(3n+1) + 4^{n+1}/(3n)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1\end{aligned}$$

avendo usato $\ln n! \sim n \ln n - n$. Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$$

b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta in forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 1 + k + k^2 + k^3 \qquad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{|a_k|^{1/k}\right\} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

cioè $R = 1$.

Esercizio 2 Sia f una funzione analitica in $\mathbb{C}$ ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_n$, tutti distinti dall'origine. Sia $r = \min_{k=1,\ldots,n} |z_k| > 0$. Stimare r sapendo che $f^{(4)}(0) = 1 - i$ e $|f(z)| \leq 5\,|z|^3$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

[punteggio 5]

Dalle disugualianze di Cauchy si ha

$$\left| f^{(4)}(0) \right| \leq \frac{4! M_r}{r^4}, \qquad M_r = \sup_{|z|=r} |f(z)|\,.$$

D'altro canto per le ipotesi su f si ha

$$\left| f^{(4)}(0) \right| = \sqrt{2},$$

$$M_r \leq 5r^3.$$

Combinando queste relazioni, otteniamo

$$\sqrt{2} \leq \frac{24}{r^4}\, 5r^3,$$

cioé $r \leq 60\sqrt{2}$.

Esercizio 3 Sviluppare in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ la funzione di Fresnel

$$S(z) = \int_0^z \sin(\pi w^2/2) dw.$$

Determinare poi lo sviluppo in serie di Laurent di $1/S(z)$ nell'anello $0 < |z| < \infty$ fino ai termini $O(z^0)$ inclusi.

[punteggio 6]

Posto $g(w) = \sin(\pi w^2/2)$ dallo sviluppo in serie di Taylor di $\sin(z)$, valido per $|z| < \infty$, cambiando $z \to \pi w^2/2$ si ha

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi w^2/2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} w^{4n+2}.$$

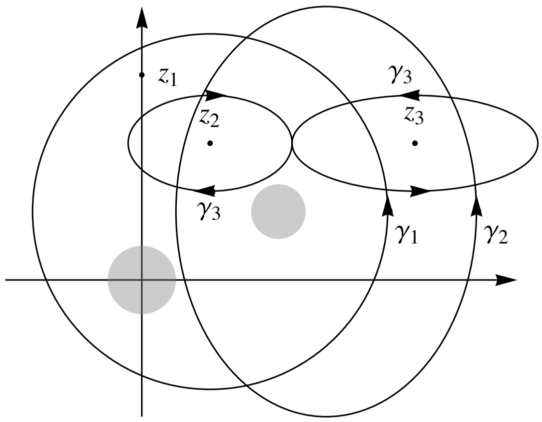
Dal teorema sull'integrazione delle serie di potenze si ottiene

$$\begin{aligned}
S(z) &= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} w^{4n+2} dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \int_0^z w^{4n+2} dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \left[\frac{w^{4n+3}}{4n+3} \right]_0^z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(4n+3)2^{2n+1}(2n+1)!} z^{4n+3} \\
&= \frac{\pi}{6} z^3 - \frac{\pi^3}{336} z^7 + O(z^{11}).
\end{aligned}$$

Il raggio di convergenza della serie ottenuta è infinito come quello della serie che rappresenta g.
La funzione $S(z)$ è intera e ha uno zero in $z = 0$. Pertanto $1/S(z)$ è sviluppabile in serie di Laurent in $A(0, 0, \infty)$ dove risulta

$$\frac{1}{S(z)} = \frac{1}{\frac{\pi}{6} z^3 + O(z^7)} = \frac{1}{\frac{\pi}{6} z^3} \frac{1}{1 + O(z^4)} = \frac{6}{\pi z^3} + O(z).$$

Esercizio 4 Una funzione f è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione delle singolarità isolate in z_1, z_2 e z_3 e dei dischi indicati in figura, all'interno dei quali non si hanno informazioni circa il comportamento di f. Esprimere l'integrale di f lungo le curve γ_1, γ_2 e γ_3 in termini di opportuni residui. Qualora le informazioni non fossero sufficienti a valutare l'integrale, dire che questo è non calcolabile.



[punteggio 6]

Per calcolare l'integrale su γ_1 si consideri un cammino γ_4 omotopo a γ_3 che contiene al suo interno anche z_3. L'integrale di f lungo γ_4 si calcola con il residuo all'infinito in quanto f è analitica su γ_4 e al suo esterno. Per il principio di deformazione dei cammini segue immediatamente

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) - \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z) \right).$$

La f è non analitica all'esterno di γ_2. All'interno di questa curva non sappiamo se f ha solo singolarità isolate. Pertanto $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ risulta non calcolabile.

La curva γ_3 è non semplice. La si scomponga nella somma di due curve chiuse semplici su e all'interno delle quali f è analitica ad eccezione delle singolarità isolate z_2 e z_3, rispettivamente. Facendo attenzione all'orientazione delle due curve chiuse semplici, si ha

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z) - \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) \right).$$

Esercizio 5 Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+9}dx, \qquad \omega > 0$$

[punteggio 6]

Posto $f(z) = e^{-i\omega z}/(z^2 + a^2)$ e detti $\gamma_\pm = \lambda_R + \gamma_{R\pm}$ i cammini chiusi di integrazione con

$$\begin{aligned} &\lambda_R(x) = x, \qquad -R \le x \le R \\ &\gamma_{R\pm}(\theta) = Re^{\pm i\theta}, \qquad 0 \le \theta \le \pi \end{aligned}$$

si osservi che per $R \to \infty$ la funzione $f(z)$ si annulla su γ_{R+} se $\omega < 0$ e su γ_{R-} se $\omega > 0$. Inoltre $f(z)$ è analitica su e dentro $\gamma_\pm$ ad eccezione del polo semplice in $z = \pm ia$. Per $\omega < 0$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} f(z)dz &= \int_{\lambda_R} f(z)dz + \int_{\gamma_{R_+}} f(z)dz \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} f(z) = 2\pi i \left.\frac{e^{-i\omega z}}{z+ia}\right|_{z=ia} = \pi\frac{e^{\omega a}}{a}, \end{aligned}$$

mentre per $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-} f(z)dz &= \int_{\lambda_R} f(z)dz + \int_{\gamma_{R_-}} f(z)dz \\ &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-ia} f(z) = -2\pi i \left.\frac{e^{-i\omega z}}{z-ia}\right|_{z=-ia} = \pi\frac{e^{-\omega a}}{a}. \end{aligned}$$

Si noti il segno negativo dovuto al verso di percorrenza negativo su γ_-. I singoli cammini di integrazione valgono

$$\int_{\lambda_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}dx$$

$$\int_{\gamma_{R_\pm}} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{e^{-i\omega R(\cos\theta \pm i\sin\theta)}}{R^2e^{\pm i2\theta}+a^2} \left(\pm iRe^{\pm i\theta}\right) d\theta$$

e quindi

$$\left|\int_{\gamma_{R_{-\operatorname{sgn}(\omega)}}} f(z)dz\right| \le \pi\, \frac{R}{R^2-a^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

In conclusione, nel limite $R \to \infty$ per ogni valore di ω, compreso il caso banale $\omega = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}\, e^{-|\omega|a}.$$

Esercizio 6 Enunciare e dimostrare il teorema noto come *principio del massimo modulo*. Questo esercizio non deve essere svolto da coloro che fanno MMMF da 10 crediti.

[punteggio 5]

Vedi *Elementi di analisi complessa*, pagina 93-94.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova Finale 16 Luglio 2010 - ANALISI FUNZIONALE

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare le seguenti distribuzioni semplificando il più possibile il risultato

a) $D(e^x \lfloor x \rfloor)$, b) $x^2 D(P(1/x))$ c) $\delta[\sin(4x)]$

[punteggio 6]

---

a) Ricordando la regola di derivazione del prodotto e il fatto che $\lfloor x \rfloor$ è costante a tratti con salti di ampiezza 1 nei punti $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, si ha

$$\begin{aligned} D(e^x \lfloor x \rfloor) &= D(e^x)\lfloor x \rfloor + e^x D(\lfloor x \rfloor) \\ &= e^x \lfloor x \rfloor + e^x \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \\ &= e^x \lfloor x \rfloor + \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^k \delta_k \end{aligned}$$

b) Ricordando che $xP(1/x) = 1$ e $x^2 P(1/x) = x$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x^2 D(P(1/x)) &= D(x^2 P(1/x)) - D(x^2) P(1/x) \\ &= D(x) - 2xP(1/2) \\ &= 1 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

c) La funzione $b(x) = \sin(4x)$ si annulla nei punti $x_k = k\pi/4$ con $k \in \mathbb{Z}$ e in tali punti risulta $b'(x_k) = 4\cos(k\pi) = 4(-1)^k$. Pertanto

$$\delta[\sin(4x)] = \sum_{x_k} \frac{1}{|b'(x_k)|} \delta_{x_k} = \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\pi/4}$$

Esercizio 2 Determinare norma, Ker e Ran dell'operatore lineare T_k definito sullo spazio vettoriale $(C_2[-1,1];\mathbb{C},\|\cdot\|_2)$ da

$$(T_k f)(x) = \left(\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right) e^{ikx}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

[punteggio 5]

Usando la disugualianza di Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky, per ogni f appartenente allo spazio vettoriale in questione si ha

$$\begin{aligned}
\|T_k f\|_2^2 &= \left|\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right|^2 \int_{-1}^{1} \left|e^{ikx}\right|^2 dx \\
&= 2\left|\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right|^2 \\
&\leq 2\int_{-1}^{1} |f(y)|^2\, dy \int_{-1}^{1} \left|e^{iky}\right|^2 dy \\
&= 4\,\|f\|_2^2
\end{aligned}$$

e quindi $\|T_k\| \leq 2$. D'altro canto, per $f(x) = e^{ikx}$ risulta

$$\frac{\|T_k f\|_2}{\|f\|_2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$$

e quindi $\|T_k\| \geq 2$. In conclusione $\|T_k\| = 2$.
Per definizione, $\operatorname{Ker} T_k = \{f \in (C_2[-1,1];\mathbb{C}) : \ T_k f = 0\}$. Poiché $T_k f = 0$ implica $\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy = 0$, si conclude

$$\operatorname{Ker} T_k = \{f \in (C_2[-1,1];\mathbb{C}) : \ \textstyle\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy = 0\}.$$

Per definizione, $\operatorname{Ran} T_k = \{g \in (C_2[-1,1];\mathbb{C}) : \ g = T_k f \text{ con } f \in (C_2[-1,1];\mathbb{C})\}$.
Poiché $T_k f = g$ implica

$$g(x) = \left(\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right) e^{ikx}, \qquad \forall x \in [-1,1],$$

si conclude

$$\operatorname{Ran} T_k = \{g \in (C_2[-1,1];\mathbb{C}) : \ g(x) = ce^{ikx}, \ c \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}\{e^{ikx}\}.$$

Esercizio 3 Sia $X = \{0,1\}^\infty$ l'insieme di tutte le successioni i cui elementi valgono 0 o 1. Dimostrare che X non è numerabile.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 74.

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,1]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ sia $W = \text{span}\{x, x^3\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^5$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$.

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi il sistema di vettori x, x^3:

$$u_1(x) = x,$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{4}{175}.$$

Usando il proiettore π_W

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k,$$

si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x^2, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k(x) = \frac{3}{7}x + \frac{10}{9}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{10}{9}x^3 - \frac{5}{21}x$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^1 \left(\frac{10}{9}x^3 - \frac{5}{21}x\right)\left(x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x\right) dx = 0.$$

<u>Esercizio 5</u> Sia T l'operatore lineare in $(C[-1,2];\mathbb{C},\|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = g(x)f(x) \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ \sqrt{x} & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di T.

[punteggio 6]

Si studi l'iniettività dell'operatore $zI-T$, $z \in \mathbb{C}$. Questo corrisponde a determinare $\mathrm{Ker}(zI-T)$ ovvero determinare per quali funzioni $f \in (C[-1,2];\mathbb{C})$ risulta $(zI-T)f = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI-T)f = 0$ implica

$$(z-g(x))f(x) = 0 \qquad \forall x \in [-1,2]$$

- Se $z \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, il fattore $z - g(x)$ è sempre non nullo per $x \in [-1,2]$ e quindi $f = 0$, cioè $zI-T$ è iniettivo.
- Se $z \in (0,1)$, il fattore $z - g(x)$ si annulla solo in $x_z = z^2$. Pertanto $f(x) = 0$ $\forall x \in [-1, x_z) \cup (x_z, 2]$ ma dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z = 0$, l'equazione $(zI-T)f = 0$ è soddisfatta per tutte quelle funzioni f continue in $[-1,2]$ e non nulle solo in $[-1,0)$. Dunque $z = 0$ è un autovalore di T e a tale autovalore corrispondono infinite autofunzioni.
- Se $z = 1$, l'equazione $(zI-T)f = 0$ è soddisfatta per tutte quelle funzioni f continue in $[-1,2]$ e non nulle solo in $(1,2]$. Dunque $z = 1$ è un autovalore di T e a tale autovalore corrispondono infinite autofunzioni.

Si studi ora la suriettività di $zI-T$. Si vuole cioé determinare $\mathrm{Ran}(zI-T)$ ovvero determinare quali funzioni $h \in (C[-1,2];\mathbb{C})$ possono essere scritte come $(zI-T)f = h$ con $f \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$. L'equazione $(zI-T)f = h$ implica

$$f(x) = \frac{h(x)}{z-g(x)} \qquad \forall x \in [-1,2]$$

- Se $z \in (0,1)$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$ la f diverge in x_z e quindi risulta non continua. In tal caso $zI-T$ è non suriettivo ma, per quanto visto in precedenza, iniettivo, cioè $z \in \sigma_c(T)$.
- Se $z \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, la funzione f, in quanto rapporto di funzioni continue con la funzione a denominatore mai nulla, è continua in $[-1,2]$. Pertanto $\mathrm{Ran}(zI-T) = (C[-1,2];\mathbb{C})$. Quindi $zI-T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.

Riepilogando, $\sigma_p(T) = \{0,1\}$, $\sigma_c(T) = (0,1)$, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus [0,1]$.

Esercizio 6 Dopo averla disegnata, sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = |x - \mathrm{sgn}(x)|, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

A cosa converge la serie così ottenuta nei punti $x = 0$, $x = \pm 1$ e $x = \pm\pi$?

[punteggio 6]

Poiché $f(-x) = f(x)$ deve essere $b_k = 0$ per $k = 1, 2, \ldots$. I coefficienti di $\cos(kx)$ valgono

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos(kx)dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}(x-1)\cos(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k} - \frac{\cos(kx)}{k^2} - \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^1 \\
&\qquad + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k} - \frac{\sin(kx)}{k}\right]_1^{\pi} \\
&= \frac{2(1 - 2\cos(k) + \cos(k\pi))}{\pi k^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}(x-1)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^{\pi} \\
&= \frac{2 - 2\pi + \pi^2}{\pi}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) \\
&\sim \frac{2 - 2\pi + \pi^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1 - 2\cos(k) + \cos(k\pi))}{\pi k^2}\cos(kx)
\end{aligned}$$

La funzione f è continua in $(-\pi, \pi)$ e pari, pertanto il suo prolungamento periodico in $\mathbb{R}$ è una funzione continua in ogni punto. Segue che la serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Nei punti $x = 0$, $x = \pm 1$ e $x = \pm\pi$ essa quindi converge rispettivamente a $f(0) = 1$, $f(\pm 1) = 0$ e $f(\pm\pi) = \pi - 1$.