MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

A.A. 2008/2009 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 17 Aprile 2009

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^{nz^2}$$

Per le funzioni polidrome si consideri il ramo principale.

[punteggio 5]

Poiché

$$i^{nz^2} = e^{nz^2 \log i} = \left(e^{z^2 \log i}\right)^n$$

si riconosce che la serie considerata è una serie geometrica di ragione $e^{z^2 \log i}$. Essa quindi converge quando $\left|e^{z^2 \log i}\right| < 1$. Posto $w = z^2$ e usando il ramo principale del logaritmo, la precedente disugualianza fornisce

$$\left|e^{w(\ln|i| + i \operatorname{Arg} i}\right| = e^{-(\pi/2)\operatorname{Im} w} < 1$$

Deve quindi essere $\operatorname{Im} w > 0$, ovvero $0 < \operatorname{Arg} w < \pi$. Poiché $w = z^2$ trasforma settori angolari in settori angolari di estensione doppia, la serie risulta convergente quando $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$ e $-\pi < \operatorname{Arg} z < -\pi/2$

Esercizio 2 Dimostrare le seguenti affermazioni, se vere, o fornire un controesempio, se false:

$a)$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

$b)$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

[punteggio 6]

$a)$ Vero. Infatti usando l'identita $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$ e le leggi di de Morgan si ha

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= (((A \cup B)^c)^\circ)^c = ((A^c \cap B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ)^c \\ &= ((A^c)^\circ)^c \cup ((B^c)^\circ)^c = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

$b)$ Falso. Si considerino in $\mathbb{R}$ i due insiemi aperti $A = (0,1)$ e $B = (1,2)$. La chiusura della loro intersezione è $\overline{A \cap B} = \emptyset$. D'altro canto si ha $\overline{A} = [0,1]$ e $\overline{B} = [1,2]$ e quindi $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Esercizio 3 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} z^n \quad c \in \mathbb{C} \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} c^{n} z^{n^2} \quad c \in \mathbb{C}$$

[punteggio 6]

$a)$ Il coefficiente n-esimo della serie assegnata vale $a_n = c^{n^2}$ e si ha

$$|a_n|^{1/n} = \left|c^{n^2}\right|^{1/n} = |c|^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & |c| < 1 \\ 1 & |c| = 1 \\ \infty & |c| > 1 \end{cases}$$

Pertanto il raggio di convergenza vale

$$R = \begin{cases} \infty & |c| < 1 \\ 1 & |c| = 1 \\ 0 & |c| > 1 \end{cases}$$

$b)$ Il coefficiente n-esimo della serie assegnata riscritta nella forma canonica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ vale

$$a_k = \begin{cases} c^n & \text{se } k = n^2 \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La formula di Hadamard fornisce

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left|c^{\sqrt{k}}\right|^{1/k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |c|^{1/\sqrt{k}} = |c|^0 \end{aligned}$$

Escludendo il caso banale $c = 0$, si ha sempre $R = 1$.

<u>Esercizio 4</u> Si dimostri il seguente teorema. Sia $f : (S, d) \mapsto \mathbb{C}$ continua in $a \in S$ con $f(a) \neq 0$, allora $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \neq 0$ $\forall x \in B(a, \delta)$.

[punteggio 5]

Poiché f è continua in a, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ $\forall x \in B(a, \delta)$. Si scelga $\varepsilon = |f(a)|/2$. Allora $|f(x) - f(a)| < |f(a)|/2$ $\forall x \in B(a, \delta)$. Se fosse $f(x) = 0$ per un qualche $x \in B(a, \delta)$ si avrebbe $|f(a)| < |f(a)|/2$. Dunque $f(x) \neq 0$ $\forall x \in B(a, \delta)$.

<u>Esercizio 5</u> Stabilire in quale dominio la funzione

$$u(x,y) = \ln((x-1)^2 + y^2)$$

è armonica e determinare la funzione $v(x,y)$ armonica coniugata a u.

[punteggio 5]

La funzione $u(x,y)$ ha derivate seconde in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ e in tale dominio risulta

$$u_x(x,y) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} \qquad u_{xx}(x,y) = \frac{-2(x-1)^2 + 2y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2}$$

$$u_y(x,y) = \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2} \qquad u_{yy}(x,y) = \frac{2(x-1)^2 - 2y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2}$$

da cui si vede che $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Posto $z = x + iy$, si riconosce immediatamente che

$$\ln((x-1)^2 + y^2) = \mathrm{Re}(2\log(z-1))$$

dove log è uno qualsiasi dei rami del logaritmo. Poiché D non è semplicemente connesso, la funzione f tale che $\mathrm{Re}\, f = u$ risulta polidroma e analitica solo in un sottodominio di D. Scegliendo per f il ramo principale, il dominio di analiticità è $\mathbb{C} \setminus \{(-t,0),\ t \in [0,\infty)\}$ e l'armonica coniugata a u risulta

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \mathrm{Im}(2\log(z-1)) = 2\,\mathrm{Arg}(z-1) \\ &= \begin{cases} 2(\arctan(y/(x-1)) - \pi) & x < 1\ y < 0 \\ 2\arctan(y/(x-1)) & x \geq 1\ (x,y) \neq (1,0) \\ 2(\arctan(y/(x-1)) + \pi) & x < 1\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 6 Determinare i seguenti limiti dimostrando quanto si afferma

$$a)\ \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2} \qquad b)\ \lim_{z\to -3}|z|^{1/2}\,e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arg} z} \qquad c)\ \lim_{z\to\infty}\frac{1-|z|^2}{z^2+i}$$

[punteggio 6]

---

a) Il limite non esiste. Infatti se si pone $z = x + ix$ si ha

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - x^2 + 2ix^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2i}{2} = i$$

mentre per $z = x - ix$ si ha

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - x^2 - 2ix^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2i}{2} = -i$$

b) Il limite non esiste. Infatti posto $z = 3e^{i\theta}$ il punto $z = -3$ può essere raggiunto per $\theta \to \pi$ e $\theta \to -\pi$. Nei due casi si ha

$$\lim_{z\to -3}|z|^{1/2}\,e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arg} z} = \lim_{\theta\to\pi}3^{1/2}e^{i\theta/2} = i\sqrt{3}$$

$$\lim_{z\to -3}|z|^{1/2}\,e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arg} z} = \lim_{\theta\to -\pi}3^{1/2}e^{i\theta/2} = -i\sqrt{3}$$

c) Si ha

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1-|z|^2}{z^2+i} = \lim_{w\to 0}\frac{1-\left|w^{-1}\right|^2}{w^{-2}+i} = \lim_{w\to 0}\frac{w^2 - (w/|w|)^2}{1+iw^2}$$

e quindi tale limite non esiste in quanto non esiste $\lim_{w\to 0}(w/|w|)^2$ come dimostrato al punto *a*).