MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2013/2014 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 17 settembre 2014

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^3 + 3z + 5 = 0$$

hanno modulo strettamente maggiore di 1. Si ragioni per assurdo.

[punteggio 5]

Sia z_0 una soluzione dell'equazione $z^3+3z+5 = 0$ e si supponga, per assurdo, che risulti $|z_0| \leq 1$. Poiché $z_0 = (-5 - z_0^3)/3$, possiamo minorare $|z_0|$ come

$$|z_0| \geq \frac{\big||-5| - |-z_0^3|\big|}{3} \geq \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Siamo così giunti ad una contraddizione, deve pertanto essere $|z_0| > 1$.
Alternativamente, si ponga $f(z) = z^3 + 5$ e $g(z) = 3z$ e si osservi che le funzioni intere f e g sono tali che $|f(z)| \geq |g(z)|$ sulla circonferenza $|z| = 1$. Per il teorema di Rouché le funzioni f e $f+g$ hanno lo stesso numero di zeri all'interno del cerchio $|z| < 1$. I tre zeri di $f(z)$ sono esterni a tale cerchio dunque $f(z) + g(z) = 0$ non ha soluzioni $|z| < 1$.

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \pi^n [(1-(-1)^n)/2] z^n, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{2+\mathrm{i}} \pi^n z^n.$$

[punteggio 5]

---

a) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} n^2 \pi^n & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n \geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m:\ n \text{ pari}} \left\{ n^{2/n} \pi \right\} \\ &= \pi \lim_{m\to\infty} n_m^{2/n_m} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

dove $n_m = m$ se m è dispari e $n_m = m+1$ se m è pari. In conclusione, $R = 1/\pi$.

b) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^{2+\mathrm{i}} \pi^n = n^2 \pi^n \mathrm{e}^{\mathrm{i} \ln n}$ e si ha

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n^2 \pi^n}{(n+1)^2 \pi^{n+1}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}.$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/\pi$.

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}}$$

assumendo per $f(z)$ il ramo corrispondente al ramo di $\log z$ che ha come linea di diramazione il semiasse immaginario positivo.

[punteggio 6]

Le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono intere, pertanto i punti di non analiticità di f sono tutti e solo quelli determinati dalla radice

$$\sqrt{\cos z} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(\cos z)\right).$$

La linea di diramazione del ramo scelto di $\log(\cos z)$ è determinata dall'equazione

$$\cos z = \mathrm{i}t, \qquad 0 \le t < \infty.$$

L'equazione risulta equivalente a

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^2 - 2\mathrm{i}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0,$$

la cui soluzione è

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{i}t + \sqrt{(\mathrm{i}t)^2 - 1} = \mathrm{i}\left(t \pm \sqrt{t^2+1}\right).$$

Osservando che, al variare di $0 \le t < \infty$, la soluzione $t+\sqrt{t^2+1}$ rappresenta il semiasse reale $[1,\infty)$ mentre $t - \sqrt{t^2+1}$ il segmento reale $[-1,0)$, si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} z(t) &= -\mathrm{i}\log\left[\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right] \\ &= (1/2+2k)\pi - \mathrm{i}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \qquad t \in [0,\infty), \qquad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= -\mathrm{i}\log\left[\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\right] \\ &= (-1/2+2k)\pi - \mathrm{i}\ln\left(\sqrt{t^2+1}-t\right), \qquad t \in [0,\infty), \qquad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Tali punti rappresentano gli assi immaginari negativi passanti per $z = (1/2+2k)\pi$ e gli assi immaginari positivi passanti per $z = (-1/2+2k)\pi$.

Esercizio 4 Sia $f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$ con $|\mathrm{Im}\, f'(z)|$ funzione limitata in $\mathbb{C}$. Dimostrare che $f(z) = a + bz$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

[punteggio 6]

Si ponga $g(z) = \exp[-\mathrm{i}f'(z)]$. La funzione g è analitica in $\mathbb{C}$ e il suo modulo

$$|g(z)| = \exp[\mathrm{Re}(-\mathrm{i}f'(z))] = \exp[\mathrm{Im}(f'(z))]$$

è una funzione limitata in $\mathbb{C}$. Per il teorema di Liouville possiamo quindi affermare che $g(z)$ è costante in $\mathbb{C}$. Segue che anche $f'(z)$ è costante in $\mathbb{C}$, diciamo $f'(z) = b$ con $b \in \mathbb{C}$. Da ciò possiamo dedurre che $f(z) = bz + h(z)$ con $h'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. D'altro canto $h(z) = f(z) - bz$ è anche analitica in $\mathbb{C}$ e pertanto costante in $\mathbb{C}$, diciamo $h(z) = a$ con $a \in \mathbb{C}$.

Esercizio 5 Stabilire se esiste $\lim_{z\to 0} f'''(z)$, dove

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)}.$$

In caso affermativo determinare il valore di tale limite.

[punteggio 5]

La funzione $f(z)$ ha un polo semplice in $z = 2$ e uno doppio in $z = 1$ ed è altrove analitica. Pertanto $f(z)$ e tutte le sue derivate sono analitiche in $z = 0$. In particolare $f'''(z)$ è continua in $z = 0$ e risulta

$$\lim_{z\to 0} f'''(z) = f'''(0).$$

Il modo più rapido per determinare il valore di $f'''(0)$ è il seguente. Nella regione $0 < |z| < 1$ la funzione $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor e, ricordando il risultato notevole della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right)^2 \left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2z^n}\left(1+2z+3z^2+4z^3+\dots\right)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2}z+\frac{17}{4}z^2+\frac{49}{8}z^3+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{17}{8}z^2-\frac{49}{16}z^3+O(z^4).
\end{aligned}$$

Da questa espressione e dall'unicità dello sviluppo in serie di Taylor segue immediatamente

$$f'''(0) = -\frac{49}{16}3! = -\frac{147}{8}.$$

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{1+x^3}\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R},$$

specificando per quali valori di a l'integrale risulta convergente.

[punteggio 6]

Si ponga $f(z) = \mathrm{e}^{(1-a)\log z}/(1+z^3)$, assumendo per il logaritmo il ramo

$$\log z = \ln r + \mathrm{i}\theta, \qquad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Si osservi che f ha poli semplici in $z = -1$ e $z = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ e una linea di diramazione coincidente con il semiasse reale positivo. Si integri f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove $\lambda_1(x) = x + \mathrm{i}0$, $r \le x \le R$, $\gamma_R(\theta) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi/3$, $\lambda_2(x) = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$, $R \ge x \ge r$, e $\gamma_r(\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $2\pi/3 \ge \theta \ge 0$. Per $R > 1$ e $r < 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\log z}}{1+z^3} \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left.\frac{\mathrm{e}^{(1-a)\log z}}{3z^2}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\, \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+a)\pi/3}.
\end{aligned}$$

Gli integrali sui cammini che compongono γ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)(\ln x + \mathrm{i}0)}}{(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}0})^3+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\mathrm{d}x = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln x}}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^r \frac{\mathrm{e}^{(1-a)(\ln x + \mathrm{i}2\pi/3)}}{(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})^3+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2-a)2\pi/3}\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln x}}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln R}}{R^3-1}\,\frac{3}{2}\pi R = \frac{3\pi R^{2-a}}{2(R^3-1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \qquad \text{se } a > -1,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{\mathrm{e}^{(1-a)\ln r}}{1-r^3}\,\frac{3}{2}\pi r = \frac{3\pi r^{2-a}}{2(1-r^3)} \xrightarrow{r\to 0} 0, \qquad \text{se } a < 2.$$

Prendendo i limiti $R \to \infty$ e $r \to 0$, per $-1 < a < 2$ si conclude

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{x^3+1}\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+a)\pi/3}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2-a)2\pi/3}} \\
&= \frac{\pi}{3}\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+a)\pi/3} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+a)\pi/3}} \\
&= \frac{\pi}{3}\,\frac{1}{\sin((1+a)\pi/3)}.
\end{aligned}$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2013/2014 – Prof. C. Presilla

Prova B3 – 17 settembre 2014

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se $\|\cdot\|$ è una norma nello spazio vettoriale indicato.

a) $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{1/2}}, \qquad x \in \ell_2(\mathbb{R})$

b) $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \qquad f \in C_1(\mathbb{R})$

c) $\|x\| = |x_1| + |x_1 + x_2 + x_3|, \qquad x \in \mathbb{R}^3$

d) $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \qquad x \in \ell_1(\mathbb{R})$

e) $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}, \qquad f \in C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$

f) $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|, \qquad x \in \overline{\text{span}(\ell_f(\mathbb{R}))}$

[punteggio 5]

---

a) No. Si prenda $x = (x_1, x_2, \dots)$ con $x_k = 1/(\sqrt{k}(\log k)^{2/3})$. Risulta $x \in \ell_2(\mathbb{R})$ in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{4/3}} < \infty$$

mentre

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{1/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{2/3}} = \infty.$$

b) No. Esistono funzioni $f \in C_1(\mathbb{R})$ non limitate. Si può scegliere, ad esempio, f come una funzione sempre nulla tranne che per dei picchi di forma triangolare centrati sugli interi positivi. Il picco k-simo centrato su $x = k$ è un triangolo di base $1/k^3$ e altezza k.

c) No. Se $x = (0, 1, -1)$ si ha $\|x\| = 0$.

d) Si. Risulta $\ell_1 \subset \ell_\infty$ e $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ spazio vettoriale normato.

e) Si. Risulta $C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}) \subset C_2(\mathbb{R})$ e $(C_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ spazio vettoriale normato.

f) No. Si consideri $x = (x_1, x_2, \dots)$ con $x_k = 1/k$. Risulta $x \in \overline{\text{span}(\ell_f(\mathbb{R}))} = \ell_0(\mathbb{R})$ mentre $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \infty$.

Esercizio 2 Sia W un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert separabile $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dimostrare che ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come

$$v = w + z, \qquad w \in W, \quad z \in W^{\perp}.$$

Omettere la dimostrazione dell'univocità di tale decomposizione.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 95.

Esercizio 3 Sia $A \in \mathcal{L}(V)$ un operatore lineare limitato nello spazio Euclideo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dimostrare che $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

[punteggio 5]

Sapendo che la norma del prodotto di due operatori è minore o uguale al prodotto delle norme degli stessi operatori e utilizzando la proprietà $\|A^*\| = \|A\|$, si ha immediatamente

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \; \|A\| = \|A\|^2.$$

Dimostriamo ora che vale la disuaglianza opposta, ovvero $\|A\| \leq \sqrt{\|A^*A\|}$. Si osservi che $\forall v \in V$, con $v \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = |\langle A^*Av, v \rangle| \leq \|A^*Av\| \; \|v\| &= \frac{\|A^*Av\|}{\|v\|} \|v\|^2 \\
&\leq \left(\sup_{u \neq 0} \frac{\|A^*Au\|}{\|u\|} \right) \|v\|^2 \\
&= \|A^*A\| \; \|v\|^2,
\end{aligned}$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \; \|v\|$ e la definizione di norma di A^*A. Segue immediatamente

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \leq \sqrt{\|A^*A\|}.$$

Esercizio 4 Dimostrare che nello spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{K}$ vale l'identità tra distribuzioni

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 2\pi\delta(x),$$

dove la serie indica il limite per $n \to \infty$ delle distribuzioni regolari φ_{g_n} con $g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

[punteggio 6]

Usiamo la notazione in cui la distribuzione regolare φ_{g_n} viene confusa con la corrispondente funzione $g_n(x)$. Per definizione

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

Per $x \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^k - 1 \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} - 1 \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2})} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(n+1)}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2})} - 1 \\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1/2)}}{2\mathrm{i}\sin(x/2)} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(n+1/2)}}{2\mathrm{i}\sin(x/2)} - 1 \\
&= \frac{\sin(x/2)+\sin(x(n+1/2))}{\sin(x/2)} - 1 \\
&= \frac{\sin(x(n+1/2))}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Utilizzando il risultato noto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{\pi x} f(x)\mathrm{d}x = f(0), \qquad \forall f \in \mathcal{K},$$

ovvero in termini di distribuzioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x} = \delta(x),$$

e osservando che per $x \simeq 0$ si ha $\sin(x/2) \simeq x/2$, concludiamo che

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x(n+1/2))}{\sin(x/2)} = 2\pi\delta(x).$$

Si osservi che l'identità così ottenuta è formalmente la rappresentazione in serie di Fourier di $2\pi\delta(x)$.

Esercizio 5 Sia θ_+ l'operatore di traslazione a destra che agisce nello spazio di Banach complesso $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$

$$\theta_+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di θ_+. Si ricordi che $\|\theta_+\| = 1$.

[punteggio 6]

Per determinare lo spettro puntuale di θ_+ studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - \theta_+$ al variare di $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI - \theta_+)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI - \theta_+)x = 0$ è soddisfatta per $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ solo da $x = 0$ (operatore $zI - \theta_+$ iniettivo). L'equazione agli autovalori $(zI - \theta_+)x = 0$ implica

$$\begin{aligned} &zx_1 = 0, \\ &zx_k = x_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Se $z = 0$ le equazioni per $k \geq 2$ forniscono l'unica soluzione $x = 0$. Se $z \neq 0$, dalla prima equazione si ha $x_1 = 0$, che usata nell'equazione per $k = 2$ fornisce $x_2 = 0$, che usata nell'equazione per $k = 3$ fornisce $x_3 = 0$, e così via. Pertanto anche per $z \neq 0$ l'unica soluzione possibile è $x = 0$. In conclusione l'operatore $zI - \theta_+$ è iniettivo $\forall z \in \mathbb{C}$ e $\sigma_p(\theta_+) = \emptyset$.
Per determinare lo spettro continuo di θ_+ studiamo la suriettività di $zI - \theta_+$ al variare di $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(\theta_+) = \mathbb{C}$. Si tratta di determinare se $\mathrm{Ran}(zI - \theta_+) = \{y \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ y = (zI - \theta_+)x, \ x \in \ell_2(\mathbb{C})\}$ coincide con tutto $\ell_2(\mathbb{C})$ (operatore $zI - \theta_+$ suriettivo) oppure ne è un sottoinsieme proprio. L'equazione vettoriale $(zI - \theta_+)x = y$ equivale al sistema di infinite equazioni scalari

$$\begin{aligned} &zx_1 - 0 = y_1 \\ &zx_k - x_{k-1} = y_k, \qquad k = 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Se $z = 0$, deve essere $y_1 = 0$ quindi $zI - \theta_+$ è certamente non suriettivo. Se $z \neq 0$, deve aversi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1}{z}, \\ x_2 &= \frac{x_1 + y_2}{z} = \frac{y_1}{z^2} + \frac{y_2}{z}, \\ x_3 &= \frac{x_2 + y_3}{z} = \frac{y_1}{z^3} + \frac{y_2}{z^2} + \frac{y_3}{z}, \\ &\vdots \\ x_k &= \frac{x_{k-1} + y_k}{z} = \frac{y_1}{z^k} + \frac{y_2}{z^{k-1}} + \dots \frac{y_{k-1}}{z^2} + \frac{y_k}{z}. \end{aligned}$$

Per $0 < |z| \leq 1$, al vettore $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$ corrisponde la soluzione x con componenti $x_k = z^{-k}$ che non appartiene a $\ell_2(\mathbb{C})$. Pertanto anche in questo caso l'operatore $zI - \theta_+$ è non suriettivo. Infine, considerando che $\sigma(\theta_+) \subset \overline{B}(0, \|\theta_+\|)$ e $\|\theta_+\| = 1$, concludiamo che $\sigma_c(\theta_+) = \overline{B}(0, 1)$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $x\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}$. Si rammenti il risultato notevole $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\lambda) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}$.

[punteggio 6]

A partire dal risultato notevole

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4},$$

e utilizzando le proprietà generali della trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(x)](\lambda/a), \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

$$\mathcal{F}[f(x+b)](\lambda) = \mathcal{F}[f(x)](\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}, \qquad b \in \mathbb{R},$$

si ha

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3x^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12},$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda 2}.$$

Infine

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) &= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda)\\ &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}\left(-\frac{\lambda}{6} - 2\mathrm{i}\right)\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(2 - \frac{\mathrm{i}\lambda}{6}\right)\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}.\end{aligned}$$