MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2011/2012 – Prof. C. Presilla

Prova B1 – 18 Giugno 2012

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Sia (X, d) uno spazio metrico e Y un sottoinsieme di X. Definire l'affermazione: *Y è denso in X*. Dimostrare che ℓ_f non è denso in $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

[punteggio 5]

Y è denso in X se $\overline{Y} = X$ ovvero se $\forall x \in X$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in Y$ tale che $d(x, y) < \varepsilon$.
In questo caso $X = \ell_\infty$ con $d(x, x') = \|x - x'\|_\infty$ mentre $Y = \ell_f$.
Si consideri il vettore (successione) $x = (1, 1, 1, ...)$ di ℓ_∞. Se y è un generico vettore (successione) di ℓ_f per definizione $\exists n$ tale che $y_k = 0$ $\forall k > n$. Quindi

$$\|x - y\|_\infty = \sup_k |x_k - y_k| \geq \sup_{k>n} |x_k - y_k| = 1.$$

Questo dimostra che

$$\|x - y\|_\infty \geq 1 \qquad \forall y \in \ell_f.$$

Di conseguenza x è un elemento di ℓ_∞ che non appartiene alla chiusura ℓ_f. Quindi ℓ_f non è denso in ℓ_∞.

Attenzione, insieme ad altre farneticazioni molti hanno fatto la seguente affermazione errata: la successione di vettori $x^{(n)} = (1, 2, \dots, n-1, n, 0, 0, \dots) \in \ell_f$ converge al vettore $x = (1, 2, 3, \dots) \notin \ell_\infty$. La convergenza va intesa in norma e la successione $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ NON converge in $\|\cdot\|_\infty$ a x, infatti per ogni intero n risulta

$$\left\| x^{(n)} - x \right\|_\infty = \infty.$$

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale $P[0,\infty)$ con prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ sia $W = \operatorname{span}\{x,x^2\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^3$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$. Si ricordi che $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{x,x^2\}$

$$u_1(x) = x$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = 2$$

$$u_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1(x) = x^2 - 3x$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^\infty \left(x^2-3x\right)^2 e^{-x}dx = 24 + 18 - 36 = 6.$$

Usando il proiettore π_W si ha

$$w = \pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v,u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k$$

ovvero

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\langle x^3,x\rangle}{2}x + \frac{\langle x^3,x^2-3x\rangle}{6}(x^2-3x) \\ &= \frac{4!}{2}x + \frac{5!-3\times 4!}{6}(x^2-3x) \\ &= 12x + 8(x^2-3x) \\ &= -12x + 8x^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x^3 - 8x^2 + 12x.$$

Esercizio 3 Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio Euclideo complesso. Dimostrare la disuguaglianza

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \qquad \forall x, y \in V$$

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 78

<u>Esercizio 4</u> Dimostrare che la successione di distribuzioni $(P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}/x))_{n=1}^{\infty}$ converge per $n \to \infty$ alla distribuzione $\mathrm{i}\pi\delta_0$. Si ricordi che $\int_{\mathbb{R}} x^{-1}\sin(x)\mathrm{d}x = \pi$.

[punteggio 6]

La distribuzione $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}/x)$ è definita dalla seguente relazione

$$P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}/x)(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)\frac{\mathrm{e}^{inx}}{x}\mathrm{d}x, \qquad f \in \mathcal{K}.$$

Sia $\operatorname{supp} f = [-a, a]$. Poiché f è derivabile si ha

$$f(x) = f(0) + xf'(\xi(x)), \qquad \xi(x) \in (-a, a),$$

pertanto

$$P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}/x)(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(f(0)\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\cos(nx)}{x}\mathrm{d}x + \mathrm{i}f(0)\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. + \int_{|x|\geq\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}f'(\xi(x))\mathrm{d}x\right).$$

Dei tre integrali che compaiono in questa espressione, il primo è nullo per motivi di parità, il secondo è proprio e vale

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|t|\geq\varepsilon/n}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \pi,$$

infine il terzo, anch'esso proprio, si annulla nel limite $n \to \infty$ in virtù del lemma di Riemann–Lebesgue applicato a $f'(\xi(x))$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}f'(\xi(x))\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}f'(\xi(x))\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{\mathrm{i}n}f'(\xi(x))\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{\mathrm{i}n}f''(\xi(x))\xi'(x)\mathrm{d}x\right) = 0.$$

In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}/x)(f) = \mathrm{i}\pi f(0)$$

che, per l'arbitrarietà di $f \in \mathcal{K}$, implica

$$P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}/x) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} \mathrm{i}\pi\delta_0.$$

Esercizio 5 Sia $f(x) = x$ con $x \in [0, \pi]$. Sviluppare f in serie di Fourier di soli seni e studiare la convergenza puntuale della serie ottenuta. Valutare infine la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$.

[punteggio 6]

Risulta

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k \sin(kx)$$

con

$$\begin{aligned}
\hat{b}_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= (-1)^{k-1} \frac{2}{k}.
\end{aligned}$$

La serie di Fourier

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2}{k} \sin(kx)$$

corrisponde allo sviluppo della funzione 2π-periodica ottenuta prima estendendo f in modo dispari in $[-\pi, \pi]$ e poi estendendo periodicamente la funzione così ottenuta a $\mathbb{R}$. Pertanto la serie converge puntualmente a $f(x)$ per $x \in [0, \pi)$ e al valore 0 per $x = \pi$.
Dall'uguaglianza di Parseval

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle f, u_k \rangle|^2}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

relativa al sistema di vettori $u_k(x) = \sin(kx)$, $k = 1, 2, \ldots$, ortogonale completo in $[0, \pi]$ e usando i risultati

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle &= \int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3}, \\
\langle f, u_k \rangle &= \int_0^{\pi} x \sin(kx) \mathrm{d}x = (-1)^{k-1} \frac{\pi}{k}, \\
\langle u_k, u_k \rangle &= \int_0^{\pi} \sin^2(kx) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 6 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_6}{6}, \frac{x_6}{6}, \dots).$$

Determinare $\|T\|$, T^* e lo spettro di T.

[punteggio 6]

Per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tx\|_2^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_{2k}|^2}{(2k)^2} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}|^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$$

che implica $\|T\| \leq 1/\sqrt{2}$. D'altro canto, per $x = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha $Tx = (1/2, 1/2, 0, 0, \dots)$ e quindi

$$\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{1/2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che implica $\|T\| \geq 1/\sqrt{2}$. In conclusione $\|T\| = 1/\sqrt{2}$.
L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\langle T^*x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (T^*x)_k \overline{y_k}$$

$$\langle x, Ty\rangle = (x_1 + x_2)\frac{\overline{y_2}}{2} + (x_3 + x_4)\frac{\overline{y_4}}{4} + (x_5 + x_6)\frac{\overline{y_6}}{6} + \dots$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (0, \frac{x_1 + x_2}{2}, 0, \frac{x_3 + x_4}{4}, 0, \frac{x_5 + x_6}{6}, \dots).$$

Studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI - T)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI - T)x = 0$ è soddisfatta per $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ solo da $x = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)x = 0$ implica

$$\frac{x_{2k}}{2k} = zx_{2k-1} \qquad k = 1, 2, \dots$$
$$\frac{x_{2k}}{2k} = zx_{2k} \qquad k = 1, 2, \dots$$

- Se $z = 0$, l'equazione $(zI-T)x = 0$ è soddisfatta per tutti gli $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ tali che $x_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Dunque T ha per $z = 0$ un autovalore infinitamente degenere.

- Se $z = 1/2n$, $n = 1, 2, \dots$, l'equazione $(zI - T)x = 0$ ammette la soluzione x non banale con componenti $x_{2n} = x_{2n-1} \neq 0$ e $x_k = 0$ per $k \neq 2n, 2n-1$. Dunque T ha per $z = 1/(2n)$ autovalori infinitamente degeneri.

- Se $z \neq 0$ e $z \neq 1/(2n)$, si ha $x_{2k} = x_{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, quindi $x = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo, ovvero z non è autovalore.

Studiamo ora la suriettività di $zI - T$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ran}(zI - T)$ coincide con $\ell_2(\mathbb{C})$ ovvero se $\forall y \in \ell_2(\mathbb{C})$ esiste $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ tale che $(zI - T)x = y$. Affinchè ciò accada deve essere

$$\begin{aligned} zx_{2k-1} - \frac{x_{2k}}{2k} &= y_{2k-1} \qquad k = 1, 2, \dots \\ zx_{2k} - \frac{x_{2k}}{2k} &= y_{2k} \qquad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- Se $z \neq 0$ e $z \neq 1/(2n)$, $n = 1, 2, \dots$, si ha $x_{2k} = y_{2k}/(z - 1/(2k))$ e $x_{2k-1} = y_{2k-1}/z + y_{2k}/(2kz(z-1/(2k)))$, $k = 1, 2, \dots$. Da queste segue $\|x\|_2^2 \leq C\,\|y\|_2^2$, con C numero reale dipendente da z, cioè $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ se $y \in \ell_2(\mathbb{C})$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.

Riepilogando, $\sigma_p(T) = \{0, 1/(2n),\ n = 1, 2, \dots\}$ e $\sigma_c(T) = \emptyset$.