MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 18 luglio 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Calcolare tutte le soluzioni della seguente equazione e graficarle nel piano complesso

$$\cos\left(\pi z^2/2\right) = 0$$

[punteggio 5]

Posto $w = x + iy$, le soluzioni dell'equazione

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 0$$

sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 0 \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases}$$

ovvero $y = 0$ e $x = \pm(2k+1)\pi/2$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si ha quindi che $\cos\left(\pi z^2/2\right) = 0$ quando

$$\frac{\pi}{2} z^2 = \pm\frac{\pi}{2}(2k+1) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

cioè quando

$$z = \sqrt{\pm(2k+1)} = \begin{cases} \pm\sqrt{(2k+1)} \\ \pm i\sqrt{(2k+1)} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} n^3 2^n z^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^{n^3} z^{1+n^3}.$$

[punteggio 6]

---

a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^3 2^n$ e si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^3 2^n}{(n+1)^3 2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/2$.

b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-5)^{k^3} & n = 1 + k^3, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{k:\ 1+k^3\geq m} \left\{ 5^{k^3/(1+k^3)} \right\} = \lim_{m\to\infty} 5 = 5, \end{aligned}$$

cioè $R = 1/5$.

Esercizio 3 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (z - z_0)^{\pi-1} \mathrm{d}z,$$

dove γ è una curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente passante per il punto $z_0 - R$, con $R > 0$, e tale $z_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$.

[punteggio 6]

Si consideri $q \neq 0$ reale arbitrario. Il ramo principale della funzione integranda

$$(z - z_0)^{q-1} = \mathrm{e}^{(q-1)\log(z-z_0)}$$

è una funzione analitica in $D = \mathbb{C} \setminus \sigma$ dove $\sigma = \{z(u) = z_0 - u,\ u \in [0, \infty)\}$ è la linea di diramazione del ramo principale di $\log(z - z_0)$ che interseca la curva γ nel punto $z_0 - R$. Parametrizzato il cammino $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ in modo tale che $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0 - R$, definiamo un nuovo cammino $\gamma_\varepsilon : [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \mapsto \mathbb{C}$ con $\varepsilon > 0$ tale che $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t)$ $\forall t \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Evidentemente si ha

$$\int_\gamma (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z.$$

La traccia di γ_ε è contenuta in D e in D il ramo principale della funzione integranda ammette come primitiva il ramo principale di $q^{-1}(z - z_0)^q$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{e}^{q\log(z-z_0)}}{q} = \mathrm{e}^{(q-1)\log(z-z_0)}.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\varepsilon} (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{e}^{q\log(\gamma_\varepsilon(b-\varepsilon)-z_0)}}{q} - \frac{\mathrm{e}^{q\log(\gamma_\varepsilon(a+\varepsilon)-z_0)}}{q} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{q\log(\gamma(b-\varepsilon)-z_0)}}{q} - \frac{\mathrm{e}^{q\log(\gamma(a+\varepsilon)-z_0)}}{q}.
\end{aligned}$$

Prendendo il limite $\varepsilon \to 0$ concludiamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (z - z_0)^{q-1} \mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{e}^{q\log(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})}}{q} - \frac{\mathrm{e}^{q\log(R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})}}{q} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{q\ln R}}{q} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi q} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi q}\right) \\
&= 2\mathrm{i}\frac{\sin(\pi q)}{q} R^q.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia $f(z)$ intera. Dimostrare che se $\exists b \in \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{Im}(f(z)) \leq b$ $\forall z \in \mathbb{C}$, allora $f(z)$ è costante in $\mathbb{C}$.

[punteggio 5]

Si ponga $g(z) = \exp(-\mathrm{i}f(z))$. La funzione g è intera. Essa è anche limitata in $\mathbb{C}$ in quanto $\forall z \in \mathbb{C}$ risulta

$$|g(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Im}\, f(z)} \leq \mathrm{e}^{b}.$$

Per il teorema di Liouville, $g(z)$ è quindi costante in $\mathbb{C}$. Concludiamo che anche $f(z) = \mathrm{i} \log g(z)$ è costante in $\mathbb{C}$.

Esercizio 5 Determinare fino all'ordine z^6 compreso lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ del ramo principale della funzione

$$f(z) = \frac{z \sin z}{\sqrt{\cos z}}.$$

[punteggio 5]

Si osservi innanzitutto che f è analitica in un intorno di $z_0 = 0$, precisamente nella palla $B(0, \pi/2)$, e in tale intorno risulta

$$f(z) = -2z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sqrt{\cos z}.$$

Pertanto è sufficiente determinare lo sviluppo in serie di Taylor con centro in $z_0 = 0$ del ramo principale di $\sqrt{\cos z}$. Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \qquad |z| < \infty,$$
$$\sqrt{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k, \qquad |z| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos z} &= \sqrt{1 + (\cos z - 1)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{16}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)^3 + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}z^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\frac{1}{(2!)^2}\right) z^4 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{6!} + \frac{1}{8}\frac{2}{2!4!} - \frac{1}{16}\frac{1}{(2!)^3}\right) z^6 + O(z^8) \\
&= 1 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{96}z^4 - \frac{19}{5760}z^6 + O(z^8).
\end{aligned}$$

Tale sviluppo è valido all'interno del massimo disco centrato in $z_0 = 0$ e tale che per ogni z al suo interno risulti $\mathrm{Re}(\cos z - 1) > -1$. Questa condizione equivale a $|z| < \pi/2$ e possiamo concludere

$$\frac{z \sin z}{\sqrt{\cos z}} = z^2 + \frac{1}{12}z^4 + \frac{19}{480}z^6 + O(z^8), \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 6 Calcolare, usando il teorema dei residui, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/\sigma^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}x,$$

con $\sigma, \lambda \in \mathbb{R}$.

[punteggio 6]

Si completi, per cominciare, il quadrato all'esponente della funzione integranda

$$\begin{aligned}
-\frac{x^2}{\sigma^2} - \mathrm{i}\lambda x &= -\left(\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 + 2\frac{x}{\sigma}\frac{\mathrm{i}\lambda\sigma}{2} + \left(\frac{\mathrm{i}\lambda\sigma}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\lambda\sigma}{2}\right)^2\right) \\
&= -\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{\mathrm{i}\lambda\sigma}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2\sigma^2}{4}.
\end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $t = x/\sigma$, l'integrale da calcolare diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/\sigma^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}x = \sigma \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t+\mathrm{i}\lambda\sigma/2)^2} \mathrm{d}t.$$

L'integrale in t può essere valutato integrando la funzione intera $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ lungo il cammino chiuso orientato negativamente $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, dove

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(u) = u, && A \geq u \geq -A, \\
&\lambda_2(y) = -A + \mathrm{i}y, && 0 \leq y \leq \lambda\sigma/2, \\
&\lambda_3(t) = t + \mathrm{i}\lambda\sigma/2, && -A \leq t \leq A, \\
&\lambda_4(y) = A + \mathrm{i}y, && \lambda\sigma/2 \geq y \geq 0.
\end{aligned}$$

In queste espressioni A è un arbitrario numero reale positivo. Dal teorema dei residui risulta

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \int_{\lambda_k} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Gli integrali lungo i quattro cammini che compongono γ valgono:

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\lambda\sigma/2} \mathrm{e}^{-(-A+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y = \int_0^{\lambda\sigma/2} \mathrm{e}^{-A^2+2\mathrm{i}Ay+y^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y,$$

$$\int_{\lambda_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-(t+\mathrm{i}\lambda\sigma/2)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\lambda_4} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\lambda\sigma/2}^{0} \mathrm{e}^{-(A+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y = -\int_0^{\lambda\sigma/2} \mathrm{e}^{-A^2-2\mathrm{i}Ay+y^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y.$$

Il modulo degli integrali su λ_2 e λ_4 può essere maggiorato come segue:

$$\left|\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \mathrm{e}^{-A^2} \int_0^{\lambda\sigma/2} \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y \xrightarrow{A\to\infty} 0,$$

$$\left|\int_{\lambda_4} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \mathrm{e}^{-A^2}\int_0^{\lambda\sigma/2} \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y \xrightarrow{A\to\infty} 0.$$

Pertanto, per $A \to \infty$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t+\mathrm{i}\lambda\sigma/2)^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

In conclusione,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/\sigma^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \sigma\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{4}}.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova B2 – 18 luglio 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\cos(ax)}{x-a}$$

appartiene allo spazio vettoriale normato $L_2([0,\infty))$.

[punteggio 5]

Dobbiamo stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\|f\|_2^2 = \int_0^\infty |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\cos^2(ax)}{(x-a)^2}\mathrm{d}x.$$

Per $a < 0$, si ha $x - a \neq 0 \ \forall x \in [0,\infty)$, pertanto l'integrale è convergente in quanto per $x \to \infty$ si ha

$$\frac{\cos^2(ax)}{(x-a)^2} \leq \frac{1}{(x-a)^2} \sim O(x^{-2}).$$

Per $a \geq 0$, la funzione integranda presenta una singolarità in $x = a$. Per determinare la natura di questa singolarità si sviluppi $\cos^2(ax)$ in serie di Taylor intorno a $x = a$

$$\begin{aligned}\cos^2(ax) = &\cos^2(a^2) - 2a\cos(a^2)\sin(a^2)(x-a) \\ &+ \frac{1}{2}\left(-2a^2\sin^2(a^2) - 2a^2\cos^2(a^2)\right)(x-a)^2 + O((x-a)^3).\end{aligned}$$

I primi due termini di questo sviluppo sono nulli quando $\cos(a^2) = 0$, cioè per $a = \sqrt{(2n+1)\pi/2}$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$. Per questi valori di a si ha

$$\cos^2(ax) = -a^2(x-a)^2 + O((x-a)^3),$$

e quindi

$$\frac{\cos^2(ax)}{(x-a)^2} = -a^2 + O(x-a).$$

La singolarità è eliminabile e l'integrale convergente (si noti che il comportamento all'infinito è come nel caso $a < 0$). Per $a \neq \sqrt{(2n+1)\pi/2}$, essendo $\cos^2(a^2) \neq 0$, la singolarità è del tipo $(x-a)^{-2}$, cioè non integrabile. In conclusione $\|f\|_2 < \infty$ per $a < 0$ e per $a = \sqrt{(2n+1)\pi/2}$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Esercizio 2 Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se $\|\cdot\|$ è una norma nello spazio vettoriale indicato.

a) $\displaystyle \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{1/2}}, \qquad x \in \ell_2(\mathbb{R})$

b) $\displaystyle \|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\,, \qquad f \in C_1(\mathbb{R})$

c) $\|x\| = |x_1| + |x_1 + x_2 + x_3|, \qquad x \in \mathbb{R}^3$

d) $\displaystyle \|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|\,, \qquad x \in \ell_1(\mathbb{R})$

e) $\displaystyle \|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \qquad f \in C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$

fa) $\displaystyle \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\,, \qquad x \in \mathrm{span}(\ell_f(\mathbb{R}))$

fb) $\displaystyle \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\,, \qquad x \in \overline{\mathrm{span}(\ell_f(\mathbb{R}))}$

[punteggio 6]

---

a) No. Si prenda $x = (x_1, x_2, \dots)$ con $x_k = 1/(\sqrt{k}(\log k)^{2/3})$. Risulta $x \in \ell_2(\mathbb{R})$ in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{4/3}} < \infty$$

mentre

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{1/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{2/3}} = \infty.$$

b) No. Esistono funzioni $f \in C_1(\mathbb{R})$ non limitate. Si può scegliere, ad esempio, f come una funzione sempre nulla tranne che per dei picchi di forma triangolare centrati sugli interi positivi. Il picco k-simo centrato su $x = k$ è un triangolo di base $1/k^3$ e altezza k.
c) No. Se $x = (0, 1, -1)$ si ha $\|x\| = 0$.
d) Si. Risulta $\ell_1 \subset \ell_\infty$ e $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ spazio vettoriale normato.
e) Si. Risulta $C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}) \subset C_2(\mathbb{R})$ e $(C_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ spazio vettoriale normato.
fa) Si. Per ogni $x \in \mathrm{span}(\ell_f(\mathbb{R})) = \ell_f(\mathbb{R})$ la serie è una somma. Valgono poi le altre proprietà della norma.
fb) No. Si consideri $x = (x_1, x_2, \dots)$ con $x_k = 1/k$. Risulta $x \in \overline{\mathrm{span}(\ell_f(\mathbb{R}))} = \ell_0(\mathbb{R})$ mentre $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \infty$.

<u>Esercizio 3</u> Sia $A \in \mathcal{L}(V)$ un operatore lineare limitato nello spazio Euclideo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dimostrare che $\|A^* A\| = \|A\|^2$.

[punteggio 5]

Sapendo che la norma del prodotto di due operatori è minore o uguale al prodotto delle norme degli stessi operatori e utilizzando la proprietà $\|A^*\| = \|A\|$, si ha immediatamente

$$\|A^* A\| \le \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2.$$

Dimostriamo ora che vale la disuaglianza opposta, ovvero $\|A\| \le \sqrt{\|A^* A\|}$. Si osservi che $\forall v \in V$, con $v \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = |\langle A^* Av, v \rangle| \le \|A^* Av\| \, \|v\| &= \frac{\|A^* Av\|}{\|v\|} \|v\|^2 \\
&\le \left(\sup_{u \neq 0} \frac{\|A^* Au\|}{\|u\|} \right) \|v\|^2 \\
&= \|A^* A\| \, \|v\|^2,
\end{aligned}$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \, \|v\|$ e la definizione di norma di $A^* A$. Segue immediatamente

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \le \sqrt{\|A^* A\|}.$$

Esercizio 4 Determinare la derivata della distribuzione regolare φ_g associata alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x)e^{|x|} & -3 \le x \le 2 \\ 0 & x < -3, \ x > 2 \end{cases} .$$

[punteggio 5]

La funzione g è continua a tratti (questo assicura che φ_g è una distribuzione) con discontinuità nei punti $u_1 = -3$ e $u_2 = 2$ di valore

$$\begin{aligned} h_1 &= g(u_1^+) - g(u_1^-) = \cos(-3)e^{|-3|} = \cos(3)e^3 \\ h_2 &= g(u_2^+) - g(u_2^-) = -\cos(2)e^{|2|} = -\cos(2)e^2 \end{aligned}$$

La derivata di g esiste continua a tratti (questo assicura che $\varphi_{g'}$ è una distribuzione) e vale

$$\begin{aligned} g'(x) &= \begin{cases} 0 & x < -3 \\ -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} & -3 < x < 0 \\ -\sin(x)e^{x} + \cos(x)e^{x} & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases} \\ &= (-\sin(x) + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x), \end{aligned}$$

dove $\chi_{[a,b]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$, cioè $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ se $x \in [a,b]$ e $\chi_{[a,b]}(x) = 0$ altrove. Di conseguenza

$$\varphi_g' = \varphi_{g'} + e^3\cos(3)\delta_{-3} - e^2\cos(2)\delta_2.$$

Alternativamente, osservando che $\chi_{[-3,2]}(x) = H(x+3) - H(x-2)$ essendo H la funzione di Heavyside,

$$\begin{aligned} D[\cos(x)e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x)] &= D[\cos(x)]e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)D[e^{|x|}]\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)e^{|x|}D[\chi_{[-3,2]}(x)] \\ &= -\sin(x)e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)e^{|x|}(\delta_{-3} - \delta_2) \\ &= (-\sin(x) + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + e^3\cos(3)\delta_{-3} - e^2\cos(2)\delta_2. \end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(C([0,\pi/3];\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = g(x)f(x),$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & 0 \le x < 1 \\ x+1 & 1 \le x \le \pi/3 \end{cases}.$$

Determinare lo spettro di T e la norma $\|T\|$.

[punteggio 6]

Determiniamo $\mathrm{Ker}(zI-T) = \{f \in C([0,\pi/3];\mathbb{C}) : (zI-T)f = 0\}$ al variare di $z \in \mathbb{C}$. L'equazione per gli autovalori $(zI-T)f = 0$ implica

$$(z - g(x))f(x) = 0, \qquad \forall x \in [0,\pi/3].$$

Se $z \in \mathbb{C} \setminus ([0,2) \cup [2,\pi/3+1])$, il fattore $z - g(x)$ non si annulla mai per $x \in [0,\pi/3]$ e quindi l'unica soluzione è quella banale $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo e z non è un autovalore. Se $z \in [0,2)$, il fattore $z - g(x)$ si annulla nel punto $x_z = (z/2)^2$. Per $x \neq x_z$ si ha $f(x) = 0$ e, dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo e z non è un autovalore. Alla stessa conclusione si giunge se $z \in [2,\pi/3+1]$. Pertanto $\sigma_p(T) = \emptyset$.
Studiamo ora $\mathrm{Ran}(zI-T) = \{h \in C([0,\pi/3];\mathbb{C}) : \ h = (zI-T)f, \ f \in C([0,\pi/3];\mathbb{C})\}$ al variare di $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$. Affinchè $(zI-T)f = h$, deve essere

$$f(x) = \frac{h(x)}{z - g(x)}, \qquad \forall x \in [0,\pi/3] : \ z - g(x) \neq 0.$$

Se $z \in [0,2)$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$, con $x_z = (z/2)^2$, la f diverge in x_z e quindi risulta non continua. Segue che $\mathrm{Ran}(zI-T)$ non coincide con tutto $C([0,\pi/3];\mathbb{C})$, cioè $zI - T$ è non suriettivo ma iniettivo. Pertanto $z \in \sigma_c(T)$. Allo stesso risultato si giunge se $z \in [2,\pi/3+1]$. Se $z \in \mathbb{C} \setminus ([0,2) \cup [2,\pi/3+1])$, il fattore $z - g(x)$ non si annulla mai per $x \in [0,\pi/3]$ e la funzione f risulta continua in $[0,\pi/3]$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e iniettivo e quindi invertibile, cioè $z \in \rho(T)$. Riepilogando, $\sigma_c(T) = [0,2) \cup [2,\pi/3+1] = [0,\pi/3+1]$.
Dalla relazione $\sigma(T) \subset \overline{B}(0,\|T\|)$ si ha $\|T\| \geq \pi/3 + 1$. D'altro canto $\forall f \in C([0,\pi/3];\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tf\|_u = \sup_{x\in[0,\pi/3]} |g(x)f(x)| \leq (\pi/3+1) \sup_{x\in[0,\pi/3]} |f(x)| = (\pi/3+1)\|f\|_u$$

cioè $\|T\| \leq \pi/3 + 1$. Si conclude che $\|T\| = \pi/3 + 1$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}\,(1 - |x|)\,.$$

Determinare la funzione $g(x)$ la cui autoconvoluzione è $f(x)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)g(x-y)\mathrm{d}y = f(x).$$

[punteggio 6]

La trasformata di Fourier di f vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}(1-x)\mathrm{d}x + \overline{\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}(1-x)\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}(1-x)\mathrm{d}x &= \left.\frac{\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}}{-(1+\mathrm{i}\lambda)}(1+x)\right|_{0}^{\infty} + \left.\frac{\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}}{(1+\mathrm{i}\lambda)^2}\right|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{i}\lambda} - \frac{1}{(1+\mathrm{i}\lambda)^2},
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\lambda) &= \frac{1}{1+\mathrm{i}\lambda} + \frac{1}{1-\mathrm{i}\lambda} - \frac{1}{(1+\mathrm{i}\lambda)^2} - \frac{1}{(1-\mathrm{i}\lambda)^2} \\
&= \frac{2}{1+\lambda^2} - \frac{2-2\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \\
&= \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}
\end{aligned}$$

Usando il teorema della convoluzione, dal precedente risultato segue

$$\mathcal{F}[g](\lambda) = \pm\sqrt{\mathcal{F}[f](\lambda)} = \pm\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}.$$

La funzione $g(x)$ è ottenuta dalla trasformata di Fourier inversa di $\mathcal{F}[g](\lambda)$. Il calcolo è immediato usando il teorema dei residui

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[g](\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\
&= \pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\
&= \pm\frac{1}{2\pi}2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(x) \operatorname*{Res}_{\lambda=\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(x)} \frac{2\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{(\lambda-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(x))(\lambda+\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(x))} \\
&= \pm\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(x) \left.\frac{2\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{\lambda+\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,x}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,x} \\
&= \pm\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(x)\mathrm{e}^{-|x|}.
\end{aligned}$$

Un procedimento alternativo è il seguente. Si osservi che

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}\,(1-|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\mathrm{e}^{-|x|}\right).$$

Usando il risultato notevole

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|x|}](\lambda) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

e le proprietà delle trasformate di Fourier, si ha

$$\mathcal{F}[x\mathrm{e}^{-|x|}](\lambda) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{-4\mathrm{i}\lambda}{(1+\lambda^2)^2}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\mathrm{e}^{-|x|}\right)\right](\lambda) = \mathrm{i}\lambda\mathcal{F}[x\mathrm{e}^{-|x|}](\lambda) = \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}.$$

Per il teorema della convoluzione, dal precedente risultato segue

$$\mathcal{F}[g](\lambda) = \pm\sqrt{\mathcal{F}[f](\lambda)} = \pm\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Usando ancora la trasformata di Fourier notevole sopra riporta, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\lambda) &= \pm\lambda\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|x|}](\lambda)\\ &= \pm\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{i}\lambda\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|x|}](\lambda)\\ &= \pm\frac{1}{\mathrm{i}}\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-|x|}\right](\lambda)\end{aligned}$$

e quindi

$$g(x) = \pm\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-|x|} = \pm\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-|x|}(-\operatorname{sgn}(x)) = \pm\mathrm{i}\operatorname{sgn}(x)\mathrm{e}^{-|x|}.$$