MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2012/2013 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 18 settembre 2013

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome, e il valore delle rispettive derivate in tale dominio:

a) $\log(z^4)$, b) $\dfrac{1}{\sin\sqrt{z}}$.

[punteggio 6]

a) Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Pertanto la funzione in esame è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti tali che

$$z^4 = -t, \qquad t \in [0, \infty),$$

ovvero

$$z(t) = (t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^{1/4} = t^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2\pi k)/4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

che rappresentano rispettivamente le bisettrici dei quadranti $1, 2, 3, 4$. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\left(z^4\right) = \frac{4}{z}.$$

b) La funzione $\sin z$ è intera mentre il ramo principale di $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}\log z)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Pertanto la funzione in esame è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa e degli zeri di $\sin\sqrt{z}$. Tali zeri sono i punti z tali che $\sqrt{z} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioé i punti $z_k = \pi^2 k^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\sin\sqrt{z}} = -\frac{\cos\sqrt{z}}{2\sqrt{z}\sin^2\sqrt{z}}.$$

Esercizio 2 Posto $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$d(z_1, z_2) = |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|,$$

dimostrare che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico e, infine, disegnare la palla aperta $B(1 + \mathrm{i}3, 1)$.

[punteggio 5]

Per dimostrare che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico occorre mostare che d è una distanza, ovvero che $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sono soddisfatte le proprietà

a) $d(z_1, z_2) \geq 0$;

b) $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$;

c) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

d) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

La prima proprietà è vera in quanto il valore assoluto di un numero reale è sempre non negativo. La seconda segue dal fatto che $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $|\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| = |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)| = 0$ che a sua volta è vera se e solo se $z_1 = z_2$. La terza discende dal fatto che $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. Per quanto riguarda la proprietà triangolare si ha

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)| \\ &\leq |\mathrm{Re}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Re}(z_3 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Im}(z_3 - z_2)| \\ &= (|\mathrm{Re}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_3)|) + (|\mathrm{Re}(z_3 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_3 - z_2)|) \\ &= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2), \end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$.

Per definizione risulta

$$\begin{aligned} B(1 + \mathrm{i}3, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : \ d(z, 1 + \mathrm{i}3) < 1\} \\ &= \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : \ |x - 1| + |y - 3| < 1\}. \end{aligned}$$

La precedente disuguaglianza è soddisfatta dai punti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$-1 + |x - 1| < y - 3 < 1 - |x - 1|.$$

Per $x > 1$ deve essere $x - 2 < y - 3 < 2 - x$ cioé $1 + x < y < 5 - x$. Per $x < 1$ deve essere $-x < y - 3 < x$ cioé $3 - x < y < 3 + x$. È facile verificare che tali punti corrispondono al quadrato, bordo escluso, di vertici $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 4)$ e $(0, 3)$.

Esercizio 3 Sia γ_n il perimetro, orientato positivamente, del quadrato di vertici $(-1-\mathrm{i})a_n$, $(1-\mathrm{i})a_n$, $(1+\mathrm{i})a_n$ e $(-1+\mathrm{i})a_n$, con $a_n = (n+1/2)\pi$ e $n \in \mathbb{N}$. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} \mathrm{d}z.$$

[punteggio 6]

La funzione integranda è analitica su γ_n e al suo interno ad eccezione dei poli semplici nei punti $z_k = k\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ e del polo di ordine 3 nel punto $z_0 = 0$. Osservando che ogni z_k è uno zero semplice di $\sin z$, risulta

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{z_k^{-2}}{\cos z_k} = \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n.$$

Per calcolare il residuo in $z_0 = 0$ si osservi che per $z \in A(0,0,\pi)$ vale lo svilupppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2 \sin z} &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)^2 + \ldots\right] \\
&= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + O(z^3),
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}.$$

Per il teorema dei residui concludiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2 \sin z} \mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=-n}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z^2 \sin z} \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left(\frac{1}{6} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} \right).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $az^n = \cos z$ contenute nella parte interna del quadrato $Q = \{z = x + \mathrm{i}y : \ -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1\}$. Si consideri n intero e $a \in \mathbb{C}$ con $|a| > \mathrm{e}$.

[punteggio 5]

Si ponga $f(z) = az^n$ e $g(z) = -\cos z$. Entrambe queste funzioni sono analitiche in Q. Inoltre $|f(z)| > |g(z)|$ per $z \in \partial Q$. Infatti, per z sulla frontiera del quadrato Q si ha $|z| \ge 1$ e quindi

$$|az^n|^2 = |a|^2 \left(|z|^2\right)^n \ge |a|^2 > \mathrm{e}^2.$$

D'altro canto per $|x| \le 1$ e $|y| \le 1$ risulta

$$|-\cos(x + \mathrm{i}y)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y) \le 1 + \left(\frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{2}\right)^2 < 1 + \mathrm{e}^2/4 < \mathrm{e}^2.$$

Pertanto, per il teorema di Rouché la funzione $f(z) + g(z)$ ha in Q° lo stesso numero di zeri, contando la molteplicità, della funzione $f(z)$, che ne ha evidentemente n (un solo zero ma di molteplicità n in $z = 0$). In conclusione, l'equazione $az^n = \cos z$ ha n soluzioni per $z \in Q^\circ$.

<u>Esercizio 5</u> Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, si definisca il numero $R \in [0, \infty]$ mediante la formula di Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} .$$

Dimostrare che la serie converge uniformemente in $\overline{B}(z_0, r)$ con $0 < r < R$ arbitrario.

[punteggio 5]

Per semplicità di notazione si ponga $w = z - z_0$. Escludiamo il caso banale $R = 0$ e supponiamo $0 \leq 1/R < \infty$. Se $0 < r < R$, $\exists \rho$ tale che $r < \rho < R$. Poiché $1/\rho > 1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$, dalla definizione di lim sup otteniamo che $\exists N$ tale che $|a_n|^{1/n} < 1/\rho$ $\forall n \geq N$. Quest'ultima disuguaglianza può essere riscritta come $|a_n| < 1/\rho^n$ e quindi $\forall w \in \overline{B}(0, r)$ si ha $|a_n w^n| < (|w|/\rho)^n < (r/\rho)^n$ $\forall n \geq N$. Poiché $r/\rho < 1$, la serie reale $\sum_{n=0}^{\infty} (r/\rho)^n$ converge e pertanto in base al criterio di Weierstrass la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge uniformemente in $\overline{B}(0, r)$.

Esercizio 6 Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{(x-b)^2+c^2} \mathrm{d}x, \qquad a>0, \quad b>0, \quad c>0.$$

[punteggio 6]

Posto $f(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/((z-b)^2+c^2)$ e detto γ il perimetro, orientato positivamente, del quadrato di vertici $-R_1$, R_2, $R_2+\mathrm{i}(R_1+R_2)$, $-R_1+\mathrm{i}(R_1+R_2)$, per $R_1>0$ e $R_2>0$ sufficientemente grandi la funzione $f(z)$ è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z=b+\mathrm{i}c$. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=b+\mathrm{i}c} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}/(z-(b-\mathrm{i}c))}{z-(b+\mathrm{i}c)} \\ &= 2\pi\mathrm{i} \left. \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z-(b-\mathrm{i}c)} \right|_{z=b+\mathrm{i}c} \\ &= \frac{\pi}{c}\mathrm{e}^{-ac}(b+\mathrm{i}c)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ab}.\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \int_{\lambda_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $\lambda_1(x) = x$, $-R_1 \le x \le R_2$, $\lambda_2(y) = R_2+\mathrm{i}y$, $0 \le y \le R_1+R_2$, $\lambda_3(x) = x+\mathrm{i}(R_1+R_2)$, $R_2 \ge x \ge -R_1$, e $\lambda_4(y) = -R_1+\mathrm{i}y$, $R_1+R_2 \ge y \ge 0$. Gli integrali lungo i cammini che compongono γ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R_1}^{R_2} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{(x-b)^2+c^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{0}^{R_1+R_2} \frac{y\mathrm{e}^{\mathrm{i}aR_2-ay}}{(R_2+\mathrm{i}y-b)^2+c^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R_2}^{-R_1} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax-a(R_1+R_2)}}{(x+\mathrm{i}(R_1+R_2)-b)^2+c^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_4} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R_1+R_2}^{0} \frac{y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}aR_1-ay}}{(-R_1+\mathrm{i}y-b)^2+c^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0.$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{(x-b)^2+c^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{c}\mathrm{e}^{-ac}(b+\mathrm{i}c)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ab}.$$

Prendendo la parte reale e quella immaginaria di questa espressione si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{(x-b)^2+c^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{c}\mathrm{e}^{-ac}(b\cos(ab)-c\sin(ab)),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{(x-b)^2+c^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{c}\mathrm{e}^{-ac}(b\sin(ab)+c\cos(ab)).$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2012/2013 – Prof. C. Presilla

Prova B3 – 18 settembre 2013

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{e}^x \delta(\sin x)\mathrm{d}x, \quad \text{b)} \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \sin(x)\delta(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x, \quad \text{c)} \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \delta(\mathrm{e}^x \sin x)\mathrm{d}x.$$

[punteggio 5]

Si ricordi che, se $b(x)$ ha zeri semplici e isolati nei punti x_k, allora $\forall f \in \mathcal{K}$ si ha

$$\delta_0[b(\cdot)](f) = \sum_k \frac{1}{|b'(x_k)|}\delta_{x_k}(f) = \sum_k \frac{f(x_k)}{|b'(x_k)|},$$

ovvero, nella notazione dei fisici usata in questo esercizio,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(b(x))f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \sum_k \frac{1}{|b'(x_k)|}\delta(x-x_k)f(x)\mathrm{d}x = \sum_k \frac{f(x_k)}{|b'(x_k)|}.$$

a) Poiché $\sin x$ ha zeri semplici nel punti $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{e}^x \delta(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{e}^x \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\cos x_k|}\delta(x-x_k)\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi} \\ &= 1 + 2\cosh\pi.\end{aligned}$$

b) Poiché $\mathrm{e}^x \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \sin(x)\delta(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \sin(x)0\mathrm{d}x = 0.$$

c) Poiché $\mathrm{e}^x \sin x$ ha zeri semplici nel punti $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$$

si ha

$$\begin{aligned}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \delta(\mathrm{e}^x \sin x)\mathrm{d}x &= \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\mathrm{e}^{x_k}(\sin x_k + \cos x_k)|}\delta(x-x_k)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^0} + \frac{1}{e^{\pi}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{-\pi}} \\ &= 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi} \\ &= 1 + 2\cosh\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 2 Siano S e T due operatori lineari limitati su V spazio di Hilbert. Dimostrare le seguenti affermazioni (nel caso di affermazione vera) o esibire un controesempio (nel caso di affermazione falsa).

a) Se T è suriettivo allora T^* è iniettivo

b) Se ST è iniettivo allora sono iniettivi sia S che T

[punteggio 6]

a) È vero. Infatti se T è suriettivo vuol dire che $\operatorname{Ran} T = V$. D'altro canto sappiamo che $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Ran} T)^\perp$ quindi abbiamo $\operatorname{Ker} T^* = V^\perp = \{0\}$ cioè T^* è iniettivo.

b) È falso. Si considerino, ad esempio, gli operatori di traslazione $\theta_\pm$ nello spazio ℓ_2

$$\theta_+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots),$$
$$\theta_-(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4 \dots).$$

Risulta $\theta_-\theta_+ = I$, quindi il prodotto di questi due operatori è iniettivo mentre θ_- non lo è in quanto $\operatorname{Ker} \theta_- = \{x \in \ell_2 : \ x_k = 0, \ k > 1\}$.

Esercizio 3 Siano X e Y due insiemi di vettori nello spazio euclideo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dimostare che

a) se $X \subset Y$ allora $X^\perp \supset Y^\perp$

b) $X^\perp = \overline{X}^\perp = \left(\overline{\mathrm{span}(X)}\right)^\perp$

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 82.

Esercizio 4 Sia $\varphi_a : \ell_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da

$$\varphi_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \qquad x \in \ell_2(\mathbb{R}), \qquad a \in \ell_2(\mathbb{R}).$$

Dimostrare che $\|\varphi_a\| = \|a\|_2$.

[punteggio 5]

Per ogni successione $x \in \ell_2(\mathbb{R})$, utilizzando la disuguaglianza di Hölder si ha

$$|\varphi_a(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = \|a\|_2 \, \|x\|_2 \, .$$

Pertanto il funzionale in questione è limitato con norma

$$\|\varphi_a\| = \sup_{x \ne 0} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|_2} \le \|a\|_2 \, .$$

Si consideri ora la successione $y \in \ell_2(\mathbb{R})$ la cui k-esima componente vale $y_k = \operatorname{sgn}(a_k)\, |a_k|$. Risulta $\|y\|_2 = \|a\|_2$ e anche

$$\varphi_a(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sgn}(a_k)\, |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|a\|_2^2 = \|a\|_2 \, \|y\|_2 \, .$$

Questo implica che

$$\|\varphi_a\| = \sup_{x \ne 0} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|_2} \ge \frac{|\varphi_a(y)|}{\|y\|_2} = \|a\|_2 \, .$$

Possiamo pertanto concludere che $\|\varphi_a\| = \|a\|_2$.

<u>Esercizio 5</u> Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (2x_1, x_1 - x_2, x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Determinare T^* e lo spettro puntuale di T. Stabilire, dimostrando ciò che si afferma, se $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2.

[punteggio 6]

L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\langle T^*x, y\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (T^*x)_k \overline{y_k} \\ \langle x, Ty\rangle &= x_1 2\overline{y_1} + x_2\overline{(y_1 - y_2)} + x_3\overline{y_2} + x_4\overline{y_3} + x_5\overline{y_4} + \dots \\ &= (2x_1 + x_2)\overline{y_1} + (x_3 - x_2)\overline{y_2} + x_4\overline{y_3} + x_5\overline{y_4} + x_6\overline{y_5} + \dots\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (2x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_4, x_5, x_6, \dots).$$

Studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare $\operatorname{Ker}(zI - T)$ ovvero trovare, se esistono, le soluzioni non banali dell'equazione per gli autovalori $(zI - T)x = 0$. Questa equazione implica

$$\begin{aligned}zx_1 &= 2x_1 \\ zx_2 &= x_1 - x_2 \\ zx_k &= x_{k-1}, \qquad k \geq 3.\end{aligned}$$

Dalla prima equazione deve essere $z = 2$ oppure $x_1 = 0$. Se $z = 2$, dalla seconda equazione troviamo $x_2 = x_1/3$ e dalle successive $x_k = x_{k-1}/2 = x_1/(3\ 2^{k-2})$ per $k \geq 3$. La successione così determinata appartiene a ℓ_2. Pertanto $z = 2$ è un autovalore degenere di T con infiniti autovettori associati del tipo

$$x = x_1(1, 1/3, 1/6, 1/12, 1/24, \dots),$$

con $x_1 \in \mathbb{C}$ arbitrario purché $x_1 \neq 0$. Se invece $z \neq 2$ e $x_1 = 0$, dalla seconda equazione troviamo $(z+1)x_2 = 0$. Se $x_2 = 0$ dalle altre equazioni segue che $x_k = 0$ per $k \geq 3$, cioé $x = 0$. Se $z = -1$ otteniamo $x_k = x_{k-1}/(-1) = x_2(-1)^k$ per $k \geq 3$. La successione così determinata non appartiene a ℓ_2. Pertanto $z = -1$ non è autovalore di T. Si conclude che $\sigma_p(T) = \{2\}$.
Si ha che $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2 se $\overline{\operatorname{Ran} T} = \ell_2$. Ricordando la relazione

$$\overline{\operatorname{Ran} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp},$$

abbiamo quindi che $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2 se e solo se $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$. L'equazione $T^*x = 0$ implica

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 - x_2 &= 0 \\ x_k &= 0, \qquad k \geq 4,\end{aligned}$$

che ha soluzione

$$x = (x_1, -2x_1, -2x_1, 0, 0, 0, \dots).$$

Dunque T^* ha un nucleo non banale, più precisamente

$$\operatorname{Ker} T^* = \operatorname{span}\{y\}, \qquad y = (1, -2, -2, 0, 0, 0, \dots),$$

e possiamo concludere che $\operatorname{Ran} T$ non è denso in ℓ_2.

Esercizio 6 Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione $h(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$. Successivamente, senza effettuare un calcolo diretto, si determini la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = x\mathrm{e}^{-|2x+1|}$.

[punteggio 6]

In base alla definizione risulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(h(x))(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\lambda)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\lambda)x}}{1-\mathrm{i}\lambda}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\lambda)x}}{-(1+\mathrm{i}\lambda)}\right|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{i}\lambda} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\lambda} \\
&= \frac{2}{1+\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che $f(x) = xh(2x+1)$ e le proprietà generali della trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(xg(x))(\lambda) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{F}(g(x))(\lambda), \\
&\mathcal{F}(g(x+b))(\lambda) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\mathcal{F}(g(x))(\lambda), \\
&\mathcal{F}(g(ax))(\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(g(x))(\lambda/a),
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x))(\lambda) &= \mathcal{F}(xh(2x+1))(\lambda) \\
&= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda/2}\frac{1}{2}\mathcal{F}(h(x))(\lambda/2) \\
&= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda/2}\frac{4}{4+\lambda^2}\right) \\
&= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda/2}\frac{2\lambda^2+8\mathrm{i}\lambda+8}{(4+\lambda^2)^2}.
\end{aligned}$$