MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2011/2012 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 19 settembre 2012

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Siano n e k due interi positivi e $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = 1$. Calcolare al variare di k la somma

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} z^{jk}.$$

[punteggio 5]

Si ponga $w = z^k$. Se $k = np$ con $p = 1, 2, 3, \ldots$, allora $w = 1$ e quindi

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} w^j = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n.$$

Se invece k non è un multiplo intero di n allora $w \neq 1$ e quindi

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} w^j = \frac{1 - w^n}{1 - w} = \frac{1 - 1}{1 - w} = 0.$$

In conclusione

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} z^{jk} = \begin{cases} n & k = np, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 2 Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$. Motivando la risposta, determinare se nello spazio metrico $(\mathbb{Q}, d)$ con $d(x,y) = |x-y|$ l'insieme A risulta a) aperto, b) chiuso, c) totalmente limitato, d) compatto.

[punteggio 5]

---

a) A è aperto in $(\mathbb{Q}, d)$. Infatti $\forall x \in A$, posto $r = \max\left(\left|x-\sqrt{2}\right|, \left|x-\sqrt{3}\right|\right)$, si consideri la palla aperta $B(x, r/2) = \{y \in \mathbb{Q} : d(x,y) < r/2\}$. Evidentemente risulta $B(x, r/2) \subset A$.

b) A è chiuso in $(\mathbb{Q}, d)$. Infatti, poiché $\sqrt{2}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ il complementare di A è $A^c = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{3}\}$. Evidentemente A^c è aperto in $(\mathbb{Q}, d)$ in quanto unione di due insiemi aperti in $(\mathbb{Q}, d)$.

c) A è totalmente limitato. Si consideri infatti lo spazio metrico (A, d) e sia $\varepsilon > 0$ un arbitrario numero reale. Si considerino poi gli n intervalli reali $[y_k, y_{k+1}]$ con $y_k = \sqrt{2} + k\varepsilon$ con $k = 1, 2, \ldots, n$ e $n = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/\varepsilon$. Detto x_k un qualsiasi numero razionale tale che $x_k \in (y_k, y_{k+1})$, e posto $B(x_k, \varepsilon) = \{x \in A : d(x, x_k) < \varepsilon\}$ risulta $A = \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.

d) A non è compatto. Questo segue immediatamente dal fatto che A non è completo. Si consideri infatti il cosiddetto metodo babilonese per calcolare le radici quadrate mediante una successione di numeri razionali. Esplicitamente si consideri la successione monotona decrescente $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ definita ricorsivamente da $x_{k+1} = (x_k + 2/x_k)/2$ con $x_0 = 1$. Tale successione è una successione di Cauchy in A che converge a $\sqrt{2} \notin A$.

<u>Esercizio 3</u> Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di $\arccos z$ e il valore della sua derivata in tale dominio.

[punteggio 6]

Posto $\arccos z = w$, si ha $z = \cos w = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})/2$ ovvero

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}\right)^2 - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 1 = 0,$$

la cui soluzione è convenzionalmente scritta come $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \mathrm{i}\sqrt{1-z^2}$. Con tale scelta infatti, assumendo per la radice il ramo principale, questa soluzione, e quindi la funzione $\arccos z$, risultano sviluppabili in serie di Taylor intorno a $z = 0$. Con la scelta $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \sqrt{z^2-1}$, questo sarebbe possibile solo per rami non principali della radice. In conclusione,

$$\arccos z = -\mathrm{i}\log\left(z + \mathrm{i}\sqrt{1-z^2}\right).$$

Il ramo principale di tale funzione è definito prendendo i rami principali della radice e del logaritmo. Il ramo principale di $\sqrt{1-z^2} = \exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$ è una funzione analitica ovunque in $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti z tali che $1 - z^2 = -u$ con $u \in [0,\infty)$. Tali punti

$$z(u) = \pm\sqrt{1+u}, \qquad u \in [0,\infty),$$

rappresentano le semirette reali $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$. Il ramo principale di $\log(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2})$ risulta non analitico nei punti che soddisfano $z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2} = -t$ con $t \in [0,\infty)$. La soluzione di questa equazione ottenuta quadrando l'espressione equivalente $\mathrm{i}\sqrt{1-z^2} = -(t+z)$ fornisce

$$z(t) = -\frac{1+t^2}{2t}, \qquad t \in (0,\infty),$$

che rappresenta la semiretta reale $(-\infty,-1]$ percorsa due volte, una volta per $t \in (0,1]$ e una volta per $t \in [1,\infty)$. Si osservi che solo i punti $z(t)$ ottenuti per $t \in [1,\infty)$ effettivamente soddisfano l'equazione di partenza in cui per la radice si considera il ramo principale. Infatti $\mathrm{i}\sqrt{1-z(t)^2} = \mathrm{i}\sqrt{-(t^2-1)^2/(4t^2)} = \mathrm{i}^2\sqrt{(t^2-1)^2/(4t^2)} \le 0$ $\forall t \in (0,\infty)$, mentre $-(t + z(t)) = (1-t^2)/2t \le 0$ solo per $t \in [1,\infty)$. In conclusione, il dominio di analiticità di $\arccos z$ è tutto il piano complesso ad eccezione delle semirette reali $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$. Nella regione di analiticità la derivata vale

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arccos z &= -\mathrm{i}\frac{1}{z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2}}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{-2z}{\sqrt{1-z^2}}\right)\\ &= \frac{-1}{\sqrt{z^2-1}}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia f analitica nella palla $B(z_0, R)$ e inoltre risulti $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in B(z_0, R)$. Dimostrare che

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!\ M}{R^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

[punteggio 5]

Detta γ_r la circonferenza di centro z_0 e raggio r, ad ogni ordine n e per ogni $r < R$ in virtù della analiticità di f in $B(z_0, R)$ possiamo applicare la formula integrale di Cauchy e scrivere

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Darboux e osservando che $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \{\gamma_r\}$, otteniamo

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq 2\pi r\ \frac{n!}{2\pi} \frac{\sup_{w \in \{\gamma_r\}} |f(w)|}{r^{n+1}} \leq \frac{n! M}{r^n}.$$

Poiché $r < R$ è arbitrario, possiamo infine prendere il limite $r \to R^-$.

Esercizio 5 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, determinare, fino all'ordine z^4 compreso, lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \log(\cos z).$$

Classificare la natura della singolarità di $f(z)$ in $z = 0$.

[punteggio 6]

Si osservi che $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione della singolarità isolata in $z = 0$ e del semiase di diramazione $[\pi/2, \infty)$. Usando gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < \infty,$$

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \qquad |z| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} \log(\cos z) &= \frac{1}{z^2} \log \left[1 + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right] \\
&= \frac{1}{z^2} \left[\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{12} z^2 - \frac{1}{45} z^4 + \dots .
\end{aligned}$$

Lo sviluppo così trovato è uno sviluppo di Laurent valido nella regione $0 < |z| < \pi/2$. La funzione $f(z)$ presenta una singolarità eliminabile in $z = 0$. La funzione

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq 0 \\ -1/2 & z = 0 \end{cases}$$

risulta analitica per $|z| < \pi/2$. Lo sviluppo in serie di Laurent sopra trovato per $f(z)$ coincide con lo sviluppo in serie di Taylor per $g(z)$.

Esercizio 6 Calcolare, motivando i passaggi e disegnado accuratamente il cammino di integrazione, l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} \mathrm{d}x.$$

[punteggio 6]

La funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} = \frac{z}{(z-z_+)^2(z-z_-)^2}$$

è analitica ovunque ad eccezione dei due poli doppi in $z_\pm = -2 \pm 3\mathrm{i}$. L'integrale di f lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_R + \gamma_R$, dove $\lambda_R(x) = x$, $-R \leq x \leq R$, e $\gamma_R(\theta) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, per il teorema dei residui vale

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z) \\ &= 2\pi\mathrm{i} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z-z_-)^2}\right|_{z=z_+} \\ &= 2\pi\mathrm{i} \frac{-z_+ - z_-}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= -\frac{\pi}{27}.\end{aligned}$$

Poiché per $z \in \{\gamma_R\}$ e R grande risulta $|f(z)| \leq R/(R^2-4R-13)^2$, segue

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi R^2}{(R^2-4R-13)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Prendendo il limite $R \to \infty$ dell'integrale su γ si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{27}.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2011/2012 – Prof. C. Presilla

Prova B3 – 19 settembre 2012

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V indicato.

a) $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad V = C_1(\mathbb{R})$

b) $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \log(1+x^2)/(1+x^2)dx \qquad V = C_b(\mathbb{R})$

c) $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \qquad V = C^2[a,b]$

d) $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\, k^{-2/3} \qquad V = \ell_4$

e) $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \qquad V = \ell_1$

[punteggio 5]

a) No. Esistono funzioni $f \in C_1(\mathbb{R})$ non limitate. Si può scegliere, ad esempio, f come una funzione sempre nulla tranne che per dei picchi di forma triangolare centrati sugli interi positivi. Se il picco k-esimo centrato su $x = k$ è un triangolo di base $1/k^3$ e altezza $2k$ risulta $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 < \infty$.

b) Si.

c) No. Si prenda $f(x) = x$ per la quale risulta $\|f\| = 0$.

d) No. Si prenda $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ con $x_k = k^{-1/3}$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3} < \infty$$

cioè $x \in \ell_4$ ma

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\, k^{-2/3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$

e) Si.

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,1]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ sia $W = \text{span}\{x, x^3\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^2$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$.

[punteggio 6]

Si ortogonalizzi il sistema di vettori x, x^3

$$u_1(x) = x,$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{4}{175}.$$

Usando il proiettore π_W

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k,$$

si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x^2, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k(x) = \frac{3}{4}x + \frac{35}{48}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{35}{48}x^3 + \frac{5}{16}x$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = -\frac{35}{48}x^3 + x^2 - \frac{5}{16}x.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^1 \left(\frac{35}{48}x^3 + \frac{5}{16}x\right)\left(-\frac{35}{48}x^3 + x^2 - \frac{5}{16}x\right) dx = 0.$$

Esercizio 3 Sia $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ localmente integrabile e sia $\varphi_g : \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R}$

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \mathrm{d}x, \qquad f \in \mathcal{K}.$$

Dimostrare che φ_g è una distribuzione.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 119.

Esercizio 4 La trasformata di Fourier di una funzione f

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

può essere pensata come l'azione di operatore lineare $\mathcal{F}$ dallo spazio delle funzioni $(L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ allo spazio delle funzioni $(C_0(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$. Calcolare la norma dell'operatore $\mathcal{F}$.

[punteggio 6]

$\forall f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f)\|_u &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx \right| \\ &\leq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x)e^{-i\lambda x} \right| dx \\ &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f\|_1 = \|f\|_1 \end{aligned}$$

e pertanto

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{f\in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ f\neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} \leq 1.$$

D'altro canto, con la scelta

$$f(x) = \begin{cases} e^{ix} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

si ha

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{-1}^{1} e^{i(1-\lambda)x}dx = 2\ \frac{\sin(\lambda-1)}{\lambda-1}$$

e quindi

$$\frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} = \frac{\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} 2\left|\frac{\sin(\lambda-1)}{\lambda-1}\right|}{\int_{-1}^{1}|e^{ix}|\,dx} = \frac{2}{2} = 1$$

Si conclude che $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Esercizio 5 Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \exp(x)$ e studiare la convergenza puntuale della serie così ottenuta.

[punteggio 5]

Si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) e^x \cos(kx) dx = \frac{2(-1 + (-1)^k \cosh \pi)}{\pi(1 + k^2)},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) e^x \sin(kx) dx = \frac{2k(1 - (-1)^k \cosh \pi)}{\pi(1 + k^2)},$$

quindi

$$\operatorname{sgn}(x) e^x \sim \frac{\cosh \pi - 1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1 + (-1)^k \cosh \pi)}{\pi(1 + k^2)} (\cos(kx) - k \sin(kx))$$

Il prolungamento periodico da $(-\pi, \pi]$ a $\mathbb{R}$ di $f(x)$ è una funzione continua a tratti, con punti di discontinuità in 0 e $\pm\pi$. Pertanto la serie trigonometrica sopra scritta converge puntualmente a $f(x)$ per $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ mentre per $x = 0$ e $x = \pm\pi$ converge rispettivamente a $(f(0^+) + f(0^-))/2 = 0$ e $(f(\pm\pi^+) + f(\pm\pi^-))/2 = \sinh \pi$.

Esercizio 6 Sia θ_- l'operatore di traslazione a sinistra che agisce nello spazio di Banach complesso $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$

$$\theta_-(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots), \qquad (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di θ_- ricordando che $\|\theta_-\| = 1$.

[punteggio 6]

Studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - \theta_-$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI - \theta_-)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI - \theta_-)x = 0$ è soddisfatta per $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ solo da $x = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - \theta_-)x = 0$ implica

$$zx_k = x_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

ovvero $x = (x_1, zx_1, z^2x_1, z^3x_1, \dots)$ con $x_1 \in \mathbb{C}$. Per capire se una successione così fatta appartiene a $\ell_2(\mathbb{C})$ valutiamo

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left|z^{k-1}x_1\right|^2 = |x_1|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{2(k-1)} = |x_1|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \\ &= \begin{cases} |x_1|^2 / (1 - |z|^2) & |z| < 1 \\ \infty & |z| \geq 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Dunque se $|z| < 1$, z è un autovalore con infiniti autovettori degeneri della forma $x = x_1(1, z, z^2, z^3, \dots)$, $x_1 \in \mathbb{C}$. Per $|z| \geq 1$, l'operatore $zI - \theta_-$ è iniettivo. Si conclude che $\sigma_p(\theta_-) = B(0, 1)$.
Per determinare lo spettro continuo, anziché studiare direttamente la suriettività di $zI - \theta_-$, si osservi che

$$\sigma(\theta_-) \subset \overline{B}(0, \|\theta_-\|) = \overline{B}(0, 1).$$

D'altro canto risulta

$$B(0, 1) = \sigma_p(\theta_-) \subset \sigma_p(\theta_-) \cup \sigma_c(\theta_-) = \sigma(\theta_-),$$

da cui, prendendo la chiusura di entrambi i membri, si ha

$$\overline{B(0, 1)} \subset \overline{\sigma(\theta_-)}.$$

Ora si osservi che lo spettro è un insieme chiuso di $\mathbb{C}$ e che la chiusura della palla $B(0, 1)$ coincide con la palla chiusa $\overline{B}(0, 1)$, pertanto

$$\overline{B}(0, 1) \subset \sigma(\theta_-).$$

Dalle due relazioni opposte, $\sigma(\theta_-) \subset \overline{B}(0, 1)$ e $\overline{B}(0, 1) \subset \sigma(\theta_-)$, si conclude che $\sigma(\theta_-) = \overline{B}(0, 1)$ e quindi

$$\sigma_c(\theta_-) = \sigma(\theta_-) \setminus \sigma_p(\theta_-) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}.$$

L'operatore $zI - \theta_-$ è suriettivo e iniettivo, quindi invertibile, per $|z| > 1$.