MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2007/2008 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 20 Giugno 2008

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Calcolare le seguenti distribuzioni semplificando il più possibile il risultato

(a) $D[\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(x-3)]$ (b) $\delta[\sin(x)]$ (c) $D^3[\frac{1}{1+x^2}\delta_0'']$

[punteggio 6]

(a) $D[\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(x-3)] = -2\delta_0 + 2\delta_3$

(b) $\delta[\sin(x)] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x-k\pi)$

$$
\begin{aligned}
\text{(c) } D^3[\frac{1}{1+x^2}\delta_0''] &= D^3[[\frac{1}{1+x^2}]_{x=0}\delta_0'' - 2D[\frac{1}{1+x^2}]_{x=0}\delta_0' + D^2[\frac{1}{1+x^2}]_{x=0}\delta_0] \\
&= D^3[\delta_0'' - 2\delta_0] \\
&= \delta_0^{(5)} - 2\delta_0^{(3)}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2 Sia (g_n) una successione di funzioni continue su $\mathbb{R}$ che converge uniformemente alla funzione continua g. Dimostrare che la successione di distribuzioni (φ_{g_n}) converge alla distribuzione φ_g.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 126.

Esercizio 3 Sia $\mathcal{F}$ l'operatore lineare che opera la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

Considerando $\mathcal{F}$ come un operatore dallo spazio $(L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ allo spazio $(C_0(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$, calcolarne la norma $\|\mathcal{F}\|$.

[punteggio 5]

$\forall f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f)\|_u &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \\ &\leq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) e^{-i\lambda x} \right| dx \\ &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f\|_1 = \|f\|_1 \end{aligned}$$

e pertanto

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{f\in L_1,\ f\neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} \leq 1.$$

D'altro canto, con la scelta

$$f(x) = \begin{cases} e^{ix} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

si ha

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{-1}^{1} e^{i(1-\lambda)x} dx = 2\,\frac{\sin(\lambda-1)}{\lambda-1}$$

e quindi

$$\frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} = \frac{\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} 2 \left|\frac{\sin(\lambda-1)}{\lambda-1}\right|}{\int_{-1}^{1} |e^{ix}|\, dx} = \frac{2}{2} = 1$$

Si conclude che $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Esercizio 4 Sia $f \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $g = \mathcal{F}(f)$. Dimostrare il cosiddetto teorema di Plancherel, ovvero l'identità

$$\|g\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2\,.$$

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 202.

Esercizio 5 Sia T l'operatore su $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \dots) = (x_1, x_1, x_1, \frac{x_4}{3}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_7}{9}, \frac{x_7}{9}, \frac{x_7}{9}, \dots)$$

Determinare $\|T\|$, T^*, autovalori e autovettori di T.

[punteggio 6]

$\forall x \in \ell_2$ si ha

$$\|Tx\|_2^2 = 3\,|x_1|^2 + \frac{3}{9}\,|x_4|^2 + \frac{3}{27}\,|x_7|^2 + \cdots \leq 3\,\|x\|_2^2$$

e quindi

$$\|T\| = \sup_{x \in \ell_2,\ x \neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{3}$$

D'altro canto, con la scelta $x = (1, 0, 0, \dots)$ si ha $\|Tx\|_2 / \|x\|_2 = \sqrt{3}$ e quindi $\|T\| = \sqrt{3}$.

L'aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ $\forall x, y \in \ell_2$. Poiché

$$\langle Tx, y\rangle = x_1(y_1 + y_2 + y_3) + \frac{x_4}{3}(y_4 + y_5 + y_6) + \frac{x_7}{9}(y_7 + y_8 + y_9) + \dots$$

si ha

$$T^*y = (y_1 + y_2 + y_3, 0, 0, \frac{1}{3}(y_4 + y_5 + y_6), 0, 0, \frac{1}{9}(y_7 + y_8 + y_9), 0, 0, \dots).$$

L'equazione agli autovalori $Tx = \lambda x$ fornisce

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda x_1 \\
x_1 &= \lambda x_2 \\
x_1 &= \lambda x_3 \\
x_4 &= 3\lambda x_4 \\
x_4 &= 3\lambda x_5 \\
x_4 &= 3\lambda x_6 \\
x_7 &= 9\lambda x_7 \\
x_7 &= 9\lambda x_8 \\
x_7 &= 9\lambda x_9 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori e autovettori

$$\begin{array}{ll}
\lambda = 0 & x = (0, x_2, x_3, 0, x_5, x_6, 0, x_8, x_9, \dots) \\
\lambda = 1 & x = (x_1, x_1, x_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \\
\lambda = 1/3 & x = (0, 0, 0, x_4, x_4, x_4, 0, 0, 0, \dots) \\
\lambda = 1/9 & x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, x_7, x_7, x_7, \dots) \\
\vdots &
\end{array}$$

ci $\lambda = 1/(3^n)$ con autovettore $x = (0, 0, 0, \dots, x_{3n+1}, x_{3n+1}, x_{3n+1}, 0, 0, 0, \dots)$

Esercizio 6 Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\exp(x)$ e studiare la convergenza puntuale della serie così ottenuta. Suggerire una funzione $g(x)$ tale che $f(x)g(x)$ ammetta uno sviluppo in serie trigonometrica di Fourier convergente uniformemente in $[-\pi,\pi]$ a fg.

[punteggio 6]

Si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x)e^x\cos(kx)dx = \frac{2(-1+(-1)^k\cosh\pi)}{\pi(1+k^2)},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x)e^x\sin(kx)dx = \frac{2k(1-(-1)^k\cosh\pi)}{\pi(1+k^2)},$$

quindi

$$\operatorname{sgn}(x)e^x \sim \frac{\cosh\pi - 1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1+(-1)^k\cosh\pi)}{\pi(1+k^2)}(\cos(kx) - k\sin(kx))$$

Il prolungamento periodico da $(-\pi,\pi]$ a $\mathbb{R}$ di $f(x)$ è una funzione continua a tratti, con punti di discontinuità in 0 e $\pm\pi$. Pertanto la serie trigonometrica sopra scritta converge puntualmente a $f(x)$ per $x \in (-\pi,0)\cup(0,\pi)$ mentre per $x = 0$ e $x = \pm\pi$ converge rispettivamente a $(f(0^+) + f(0^-))/2 = 0$ e $(f(\pm\pi^+) + f(\pm\pi^-))/2 = \sinh\pi$.
Scegliendo, ad esempio,

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -e^{-2x} & x < 0 \end{cases}$$

si ha $f(x)g(x) = e^{|x|}$ il cui prolungamento periodico da $(-\pi,\pi]$ a $\mathbb{R}$ è una funzione continua con derivata prima continua a tratti. Questo garantisce la convergenza uniforme della corrispondente serie di Fourier.