MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova Finale 20 Settembre 2010 - ANALISI COMPLESSA

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} i^{-in} z^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \log(in) z^{2n}.$$

[punteggio 5]

---

a) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = i^{-in} = e^{-in \log i} = e^{-in(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{n\pi/2}.$$

Inoltre

$$|a_n|^{1/n} = e^{\pi/2}$$

e quindi

$$R = e^{-\pi/2}.$$

b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} \log(in/2) & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Osservando che $|\log(in/2)| = \sqrt{(\ln(n/2))^2 + \pi^2/4}$ e ricordando che $(\ln k)^{1/k}$ per $k \to \infty$ decresce monotonamente a 1, si ha

$$\begin{aligned} R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} \left\{ |a_k|^{1/k} \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{(\ln(k_n/2))^2 + \pi^2/4} \right)^{1/k_n} \\ &= 1, \end{aligned}$$

avendo posto $k_n = n$ se n è pari e $k_n = n + 1$ se n è dispari. In conclusione, $R = 1$.

Esercizio 2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$e^{z^2} = -1.$$

[punteggio 5]

Prendendo il logaritmo di entrambi i membri dell'equazione si ha

$$z^2 = \log(-1) = \log\left(1\ e^{i\pi}\right) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = (2k+1)i\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Estraendo la radice quadrata di questa espressione, segue

$$z = \sqrt{(2k+1)\pi e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{(2k+1)\pi}\ e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{2}\right)}, \qquad n = 0, 1,$$

se $k = 0, 1, 2, \ldots$, oppure

$$z = \sqrt{|2k+1|\,\pi e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt{|2k+1|\,\pi}\ e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi n}{2}\right)}, \qquad n = 0, 1,$$

se $k = -1, -2, \ldots$. Ponendo $k = -m-1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, è possibile riscrivere il secondo sistema di soluzioni come

$$z = \sqrt{(2m+1)\pi}\ e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi n}{2}\right)}, \qquad n = 0, 1.$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$z^{\pm}_{1,k} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{2k+1}{2}\ \pi}, \qquad z^{\pm}_{2,k} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{2k+1}{2}\ \pi}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3 Assumendo per il logaritmo il ramo principale, determinare la regione di analiticità della funzione

$$f(z) = (z+1)\log\left(1+z^2\right)$$

e quindi svilupparla in serie di Taylor intorno a $z = 0$.

[punteggio 6]

Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano

$$1 + z^2 = -t, \qquad t \geq,$$

ovvero

$$z = \pm i\sqrt{1+t}, \qquad t \geq 0.$$

Lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z = 0$ esiste all'interno del massimo cerchio di analiticità centrato nell'origine: questo ha raggio 1. Utilizzando lo sviluppo notevole, valido per $|z| < 1$,

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n,$$

si ha

$$\begin{aligned}
(z+1)\log\left(1+z^2\right) &= (z+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n} \\
&= z^2 + z^3 - \frac{z^4}{2} - \frac{z^5}{2} + \frac{z^6}{3} + \frac{z^7}{3} - \frac{z^8}{4} - \frac{z^9}{4} + \dots \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,
\end{aligned}$$

dove

$$a_k = \begin{cases} (2(-1)^{k/2+1})/k, & k \text{ pari} \\ (2(-1)^{(k-1)/2+1})/(k-1), & k \text{ dispari} \end{cases}.$$

Il raggio di convergenza di questa serie è

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1.$$

<u>Esercizio 4</u> Sia f una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione della singolarità isolata, di natura non specificata, in $z = 2 + 3i$ e sia γ la circonferenza $|z - 3| = 2$ orientata positivamente. Calcolare i seguenti integrali, esprimendo il risultato, se necessario, in termini dei valori assunti da f e dalle sue derivate in punti opportuni. Qualora le informazioni non fossero sufficienti a valutare l'integrale, dire che questo è non calcolabile.

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z+i)^2}dz$, b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z-1)^2}dz$, c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z-4)^2}dz$.

[punteggio 6]

Assumendo, come al solito, per $\sqrt{z}$ il ramo principale avente un asse di diramazione coincidente con il semiasse reale negativo, si ha

$$\int_\gamma \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z+i)^2}dz = 0$$

in quanto la funzione integranda è analitica su e dentro γ,

$$\int_\gamma \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z-1)^2}dz \text{ non calcolabile}$$

in quanto la funzione integranda ha una singolarità su γ,

$$\int_\gamma \frac{f(z)\sqrt{z}}{(z-4)^2}dz = 2\pi i(f(4)/4 + 2f'(4))$$

utilizzando la formula integrale di Cauchy per la funzione $g(z) = f(z)\sqrt{z}$ analitica su e dentro γ.

<u>Esercizio 5</u> Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n+1}}dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

[punteggio 6]

Si consideri $f(z) = 1/(1+z^{2n+1})$ analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione dei $2n+1$ poli semplici in

$$z_k = e^{i\pi/(2n+1)+i2\pi k/(2n+1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Detto $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ il cammino chiuso di integrazione con

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(x) = x, \qquad 0 \le x \le R,\\
&\lambda_2(\theta) = Re^{i\theta}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi/(2n+1),\\
&\lambda_3(x) = xe^{i2\pi/(2n+1)}, \qquad R \ge x \ge 0,
\end{aligned}$$

per $R > 1$ $f(z)$ è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = z_0$. Pertanto

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\lambda_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 2\pi i \frac{1}{(2n+1)z_0^{2n}}.$$

Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{\lambda_1} f(z)dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^{2n+1}}dx,$$

$$\left| \int_{\lambda_2} f(z)dz \right| \le \frac{2\pi R}{2n+1}\, \frac{1}{R^{2n+1}-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_3} f(z)dz = -e^{i2\pi/(2n+1)} \int_0^R \frac{1}{1+x^{2n+1}}dx.$$

In conclusione, nel limite $R \to \infty$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n+1}}dx &= \frac{2\pi i/(2n+1)}{e^{i2n\pi/(2n+1)}} \frac{1}{1-e^{i2\pi/(2n+1)}}\\
&= \frac{2\pi i/(2n+1)}{e^{i2n\pi/(2n+1)}} \frac{1}{\left[e^{-i\pi/(2n+1)} - e^{i\pi/(2n+1)}\right] e^{i\pi/(2n+1)}}\\
&= \frac{\pi/(2n+1)}{\sin[\pi/(2n+1)]}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 Supponendo che $f(z) = 1/q(z)^2$ con $q(z)$ analitica in z_0 e con $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$, dimostrare che f ha un polo di ordine 2 in z_0 e vale

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^3}.$$

[punteggio 5]

Per ipotesi $\exists \varepsilon > 0$ tale che per $|z - z_0| < \varepsilon$ vale lo sviluppo in serie di Taylor

$$\begin{aligned} q(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \\ &= (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0)^n \\ &= (z - z_0) g(z). \end{aligned}$$

La funzione $g(z)$ in quanto somma di una serie di potenze è analitica in z_0. In z_0 essa risulta anche non nulla. Infatti derivando $q(z) = (z - z_0)g(z)$ rispetto a z si ha

$$q'(z) = g(z) + (z - z_0)g'(z) \qquad \Rightarrow \qquad g(z_0) = q'(z_0).$$

Derivando ancora si ottiene

$$q''(z) = 2g'(z) + (z - z_0)g''(z) \qquad \Rightarrow \qquad 2g'(z_0) = q''(z_0).$$

Posto

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^2}, \qquad \phi(z) = g(z)^{-2},$$

per le proprietà di g, ϕ risulta analitica e non nulla in z_0. Quindi $f(z)$ ha un polo di ordine 2 in z_0 con

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \phi'(z_0) = -\frac{2g'(z_0)}{g(z_0)^3} = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^3}.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova Finale 20 Settembre 2010 - ANALISI FUNZIONALE

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Si consideri la distribuzione F sullo spazio $\mathcal{K}$ definita da

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Si determini $F'(f)$ sotto forma di un integrale su $\mathbb{R}$ il cui integrando è espresso in termini di f (non di f').

[punteggio 6]

Per definizione di derivata di una distribuzione risulta

$$F'(f) = -F(f') = -\int_{\mathbb{R}} \frac{f'(x)}{\sqrt{|x|}} dx = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{K\to\infty} \int_{\varepsilon\le|x|\le K} \frac{f'(x)}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Integrando per parti e assumendo K sufficientemente grande in modo tale che $\operatorname{supp} f \subset [-K, K]$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon\le|x|\le K} \frac{f'(x)}{\sqrt{|x|}} dx &= \left[\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}\right]_{-K}^{-\varepsilon} + \left[\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}\right]_{\varepsilon}^{K} + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\le|x|\le K} \frac{\operatorname{sgn}(x) f(x)}{|x|^{3/2}} dx \\
&= \frac{f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\le|x|\le K} \frac{\operatorname{sgn}(x) f(x)}{|x|^{3/2}} dx.
\end{aligned}$$

Per il primo termine si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{-2\varepsilon f'(0)}{\sqrt{\varepsilon}} = 0.$$

Inoltre si osservi che per motivi di parità

$$\int_{\varepsilon\le|x|\le K} \frac{\operatorname{sgn}(x) f(0)}{|x|^{3/2}} dx = 0,$$

quindi

$$\int_{\varepsilon\le|x|\le K} \frac{\operatorname{sgn}(x) f(x)}{|x|^{3/2}} dx = \int_{\varepsilon\le|x|\le K} h(x) dx,$$

dove $h(x) = \operatorname{sgn}(x)(f(x) - f(0))/|x|^{3/2}$. Poiché

$$|h(x)| = \left|\frac{f(x) - f(0)}{|x|} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right| \le \frac{\|f'\|_u}{\sqrt{|x|}},$$

h risulta localmente integrabile in $x = 0$ e poiché

$$|h(x)| \le \frac{|f(x)| + |f(0)|}{|x|^{3/2}} \le \frac{2\,\|f\|_u}{|x|^{3/2}},$$

h è anche assolutamente integrabile su tutto $\mathbb{R}$. Possiamo pertanto prendere i limiti $\varepsilon \to 0^+$ e $K \to \infty$ e scrivere

$$\begin{aligned}
F'(f) &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\le|x|\le K} \frac{\operatorname{sgn}(x)(f(x) - f(0))}{|x|^{3/2}} dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sgn}(x)(f(x) - f(0))}{|x|^{3/2}} dx.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \dots)$$

Determinare la norma di T e l'operatore aggiunto T^*.

[punteggio 5]

Per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |(Tx)_k|^2 = |x_2|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} |x_{k-1} + x_{k+1}|^2 \\
&\leq |x_2|^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} |x_{k-1}|^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} |x_{k+1}|^2 \\
&= 2\,\|x\|_2^2 + 2\,\|x\|_2^2 - |x_2|^2 - 2\,|x_1|^2 \leq 4\,\|x\|_2^2
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} \leq 2$$

Si consideri ora la successione $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ con $x^{(n)} \in \ell_2(\mathbb{C})$ definita da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

L'azione dell'operatore T su $x^{(n)}$ fornisce

$$(Tx^{(n)})_k = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 2 & 2 \leq k \leq n-1 \\ 1 & k = n, n+1 \\ 0 & k > n+1 \end{cases}$$

e risulta

$$\frac{\left\|Tx^{(n)}\right\|_2}{\left\|x^{(n)}\right\|_2} = \frac{\sqrt{4(n-2)+3}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{1 - 5/n} \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

Deve perciò essere $\|T\| \geq 2$. In conclusione, $\|T\| = 2$.
Dalla definizione di aggiunto, $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}
\langle T^*x, y\rangle &= \langle x, Ty\rangle \\
&= x_1\overline{y_2} + x_2(\overline{y_1} + \overline{y_3}) + x_3(\overline{y_2} + \overline{y_4}) + x_4(\overline{y_3} + \overline{y_5}) + \dots \\
&= x_2\overline{y_1} + (x_1 + x_3)\overline{y_2} + (x_2 + x_4)\overline{y_3} + (x_3 + x_5)\overline{y_4} + \dots
\end{aligned}$$

Dalla arbitrarietà di y, segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \dots) \qquad \forall x \in \ell_2(\mathbb{C})$$

cioè $T^* = T$.

Esercizio 3 Sia A un operatore lineare limitato su V spazio di Banach. Enunciare e dimostrare il teorema sull'esistenza di $(I - A)^{-1}$.

[punteggio 6]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 147.

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,1]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ sia $W = \text{span}\{x, x^3\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = \ln x$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$. Si osservi che $\int_0^1 x^n \ln x \, dx = -1/(1+n)^2$.

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi il sistema di vettori x, x^3:

$$u_1(x) = x,$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{4}{175}.$$

Usando il proiettore π_W

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k,$$

si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle \ln x, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{245}{64}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{245}{64}x^3 - \frac{195}{64}x$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = \ln x - \frac{245}{64}x^3 + \frac{195}{64}x.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^1 \left(\frac{245}{64}x^3 - \frac{195}{64}x\right)\left(\ln x - \frac{245}{64}x^3 + \frac{195}{64}x\right) dx = 0.$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $\ell_2(\mathbb{C})$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2 - x_1, \frac{x_3 - x_2}{2}, \frac{x_4 - x_3}{3}, \frac{x_5 - x_4}{4}, \dots)$$

Determinare tutti gli autovalori di T. Stabilire se $z = 0$ appartiene allo spettro continuo di T.

[punteggio 6]

L'equazione per gli autovalori $(zI - T)x = 0$ implica

$$x_{k+1} = (1+z)(1+2z)\dots(1+kz)x_1 = x_1 \prod_{j=1}^{k}(1+jz)$$

- Se $z = 0$, si ha $x_{k+1} = x_1$ per ogni k. Per $x_1 \neq 0$, la successione non identicamente nulla $x = (x_1, x_1, \dots) \notin \ell_2$. Dunque $z = 0$ non è autovalore.
- Se $z = -1/n$ con n intero positivo, allora $x_k = 0\ \forall k > n$. La successione $x^{(n)}$ di componenti

  $$x_k^{(n)} = \begin{cases} \prod_{j=1}^{k}(1 - j/n) & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

  appartiene a ℓ_2 ed è soluzione non banale dell'equazione $(-(1/n)I - T)x = 0$. Pertanto $z = -1/n$ è autovalore e $x^{(n)}$ è un corrispondente autovettore.
- Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1/n, n = 1, 2, \dots\}$, allora $|x_k|$ diverge per $k \to \infty$ e $x \notin \ell_2$. Pertanto z non può essere un autovalore.

In conclusione, $\sigma_p(T) = \{-1/n,\ n = 1, 2, \dots\}$.
Poiché lo spettro è chiuso e $z = 0$ è punto di accumulazione di $\sigma_p(T)$ ma non è autovalore, deve essere $z \in \sigma_c(T)$.

Esercizio 6 Nella prova finale dello scorso giugno si chiedeva di sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x - \mathrm{sgn}(x)|$. A memoria il risultato finale poteva essere del tipo

$$f(x) \sim \frac{2 - 2\pi + \pi^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (1 - 2\cos(k) + \cos(k\pi))}{\pi k^{1/2}} \cos(kx).$$

Perché tale risultato è palesemente errato?

[punteggio 5]

I coefficienti di Fourier devono soddisfare l'uguaglianza di Parseval quindi, in particolare, la serie dei loro moduli quadri deve essere convergente. Invece

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2 + (1 - 2\cos(k) + \cos(k\pi))}{\pi k^{1/2}} \right|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k} = \infty.$$