MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 21 aprile 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare la somma

$$S = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}.$$

Suggerimento: si consideri la formula di de Moivre

[punteggio 6]

Si ponga

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{11}} = \cos\frac{\pi}{11} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11},$$

utilizzando la formula di de Moivre $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$, risulta

$$S = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{4} z^{2k+1} = \operatorname{Re} z\sum_{k=0}^{4}(z^2)^k = \operatorname{Re} z\frac{1-(z^2)^5}{1-z^2} = \operatorname{Re}\frac{z-z^{11}}{1-z^2}.$$

Osservando che $z^{11} = -1$, si ottiene

$$S = \operatorname{Re}\frac{1}{1-z} = \operatorname{Re}\frac{1-\overline{z}}{(1-z)(1-\overline{z})} = \frac{1-\operatorname{Re} z}{1+|z|^2-2\operatorname{Re} z} = \frac{1-\operatorname{Re} z}{2(1-\operatorname{Re} z)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2 Sia $f : (S,d) \mapsto (\Omega,\rho)$ una funzione tra i due spazi metrici (S,d) e (Ω,ρ). Dimostrare che se f è continua in S e S è compatto allora f è uniformemente continua in S.

[punteggio 5]

Si veda il Teorema 3.29 a pagina 36 del testo di riferimento.

<u>Esercizio 3</u> Si consideri la funzione $f : D \mapsto \mathbb{C}$, con $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definita da $f(z) = \mathrm{Arg}(z^2) - \mathrm{i}2a \ln|z|$ con $a \in \mathbb{R}$. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità di f al variare del parametro a.

[punteggio 5]

In rappresentazione polare $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, si ha $D = \{(r, \theta) :\ r > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi\}$. Poiché $a \in \mathbb{R}$, le componenti reale e immaginaria di $f(z)$ sono

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Arg}(r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}), \\ v(r,\theta) &= \mathrm{Im}\, f(z) = -2a \ln r. \end{aligned}$$

Indipendentemente dal valore di a, la funzione $v(r,\theta)$ è continua in D mentre

$$u(r,\theta) = \begin{cases} 2\theta + 2\pi & -\pi < \theta \leq -\pi/2 \\ 2\theta & -\pi/2 < \theta \leq \pi/2 \\ 2\theta - 2\pi & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

è continua nel sottoinsieme $\tilde{D} = \{(r, \theta) :\ r > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi,\ \theta \neq \pm\pi/2\}$ che rappresenta il piano complesso ad eccezione dell'asse immaginario. Allo stesso risultato si giunge anche senza calcolare esplicitamente $u(r,\theta)$, osservando che $\mathrm{Arg}(z^2)$ è una funzione continua in $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti per cui il suo argomento è reale negativo, $z(t)^2 = -t$, $t \geq 0$, che fornisce $z(t) = \pm\mathrm{i}t$, $t \geq 0$. In conclusione, f risulta continua in $\tilde{D}$ per ogni valore di a.
All'interno del dominio di continuità $\tilde{D}$, le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} &u_r(r,\theta) = 0, \qquad u_\theta(r,\theta) = 2, \\ &v_r(r,\theta) = -2a/r, \qquad v_\theta(r,\theta) = 0. \end{aligned}$$

Le equazioni di Cauchy-Riemann, $ru_r = v_\theta$ e $u_\theta = -rv_r$, sono quindi

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ 2 &= 2a. \end{aligned}$$

Per $a = 1$ entrambe le equazioni sono soddisfatte in ogni punto di $\tilde{D}$ e quindi f è derivabile in $\tilde{D}$. Poiché $\tilde{D}$ è un aperto, esso è anche il dominio di analiticità di f. A questo risultato si poteva giungere osservando che per $a = 1$ si ha $f(z) = -\mathrm{i}\log(z^2)$ con log ramo principale del logaritmo. Per $a \neq 1$ le equazioni di Cauchy-Riemann non sono mai soddisfatte, pertanto f non è mai derivabile e il suo dominio di analiticità è vuoto.

Esercizio 4 Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$, con $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definita da

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}.$$

Mostrare che f non ha primitiva in D.

[punteggio 5]

Nel dominio D, aperto e connesso, f ha primitiva se e solo se $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ per ogni cammino γ chiuso, regolare a tratti, contenuto in D. Si consideri la circonferenza γ centrata nell'origine, di raggio 1, orientata positivamente. Per la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione intera $\sin z$, risulta

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\sin z}{(z-0)^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z\bigg|_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}\cos 0 \neq 0.$$

Pertanto f non ha primitiva in D.

Esercizio 5 Determinare in quale regione anulare centrata in $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\cos t}{t-z}\mathrm{d}t + \int_2^\infty \frac{\sin t}{t-z}\mathrm{d}t$$

è sviluppabile in serie di Laurent e determinare tale sviluppo.
Nota bene: non valutare esplicitamente alcun integrale.

[punteggio 6]

La funzione $f(z)$ è somma di due termini, il primo è una funzione analitica in $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, mentre il secondo è una funzione analitica in $\mathbb{C}\setminus[2,\infty)$. Dunque $f(z)$ è analitica in $A(0,1,2)$.
Per $1 < |z| < 2$, $f(z)$ ammette lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned}
f(z) &= \int_0^1 \frac{\cos t}{t-z}\mathrm{d}t + \int_2^\infty \frac{\sin t}{t-z}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{z}\int_0^1 \frac{\cos t}{1-t/z}\mathrm{d}t + \int_2^\infty \frac{\sin t}{t(1-z/t)}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{z}\int_0^1 \cos t\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{z^k}\right)\mathrm{d}t + \int_2^\infty \frac{\sin t}{t}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{t^k}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\sum_{k=0}^\infty \left(\int_0^1 t^k \cos t\ \mathrm{d}t\right)\frac{1}{z^{k+1}} + \sum_{k=0}^\infty \left(\int_2^\infty \frac{\sin t}{t^{k+1}}\mathrm{d}t\right) z^k \\
&= \sum_{n=0}^\infty \left(\int_2^\infty \frac{\sin t}{t^{k+1}}\mathrm{d}t\right) z^n - \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^1 t^{n-1}\cos t\ \mathrm{d}t\right)\frac{1}{z^n}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6   Calcolare l'integrale reale

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\sin x}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{R_1,R_2\to\infty}\lim_{r\to 0^+}\left(\int_{-R_1}^{1-r}\frac{x^2\sin x}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x+\int_{1+r}^{R_2}\frac{x^2\sin x}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x\right).$$

[punteggio 6]

Si consideri la funzione complessa $f(z)=z^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/((z-1)(z^2+1))$ che ha poli semplici in $z=1$ e $z=\pm\mathrm{i}$ e la si integri lungo il cammino $\gamma=\lambda_1^l+\gamma_r^-+\lambda_1^r+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$, orientato positivamente, dove $\lambda_1^l(x)=x$, $-R_1\le x\le 1-r$, $\gamma_r^-(\theta)=1+r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $-\pi\le\theta\le 0$, $\lambda_1^r(x)=x$, $1+r\le x\le R_2$, $\lambda_2(y)=R_2+\mathrm{i}y$, $0\le y\le R_1+R_2$, $\lambda_3(x)=x+\mathrm{i}(R_1+R_2)$, $R_2\ge x\ge -R_1$, e $\lambda_4(y)=-R_1+\mathrm{i}y$, $R_1+R_2\ge y\ge 0$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}f(z).$$

Osservando che gli integrali lungo le componenti di γ valgono

$$\int_{\lambda_1^l}f(z)\mathrm{d}z=\int_{-R_1}^{1-r}\frac{x^2\sin x}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\gamma_r^-}f(z)\mathrm{d}z\xrightarrow{r\to 0}-\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=1}f(z),$$

$$\int_{\lambda_1^r}f(z)\mathrm{d}z=\int_{1+r}^{R_2}\frac{x^2\sin x}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2}f(z)\mathrm{d}z=\int_0^{R_1+R_2}\frac{(R_2+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}R_2-y}}{(R_2+\mathrm{i}y-1)((R_2+\mathrm{i}y)^2+1)}\mathrm{d}y\xrightarrow{R_1,R_2\to\infty}0,$$

$$\int_{\lambda_3}f(z)\mathrm{d}z=\int_{R_2}^{-R_1}\frac{(x+\mathrm{i}(R_1+R_2))\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-(R_1+R_2)}}{(x+\mathrm{i}(R_1+R_2)-1)((x+\mathrm{i}(R_1+R_2))^2+1)}\mathrm{d}x\xrightarrow{R_1,R_2\to\infty}0,$$

$$\int_{\lambda_4}f(z)\mathrm{d}z=\int_{R_1+R_2}^{0}\frac{(-R_1+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R_1-y}}{(-R_1+\mathrm{i}y-1)((-R_1+\mathrm{i}y)^2+1)}\mathrm{d}y\xrightarrow{R_1,R_2\to\infty}0,$$

si conclude

$$\begin{aligned}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\sin x}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x&=\mathrm{Im}\left(2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}f(z)+\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)\right)\\&=\mathrm{Im}\left(2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}^2\mathrm{e}^{-1}}{(\mathrm{i}-1)2\mathrm{i}}+\pi\mathrm{i}\frac{1\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}\right)\\&=\mathrm{Im}\left(\frac{\pi}{2\mathrm{e}}(1+\mathrm{i})+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}(\cos 1+\mathrm{i}\sin 1)\right)\\&=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}+\frac{\pi}{2}\cos 1.\end{aligned}$$