# MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2008/2009 – Prof. F. Cesi e C. Presilla

Prova Finale 21 Settembre 2009

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |

| | | |
|---|---|---|
| Canale | Cesi (Astrofisica) | Presilla (Fisica) |

| | | |
|---|---|---|
| intendo MANTENERE il voto degli esoneri | 1 | 2 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | | |

| esercizio | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |

Esercizio 1 Determinare per quali valori $z \in \mathbb{C}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n} \right)$$

[punteggio 4]

---

La convergenza della serie proposta è equivalente alla convergenza simultanea delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{z^n}$$

La prima ha somma $\exp(z)$ e raggio di convergenza infinito. La seconda, con la posizione $w = 1/z$, è la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 w^n$$

con raggio di convergenza

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Tale serie quindi converge per $|w| < 1$, ovvero per $|z| > 1$. Si conclude che la serie proposta converge nell'anello $1 < |z| < \infty$.

Esercizio 2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin z = \cos z$$

e dire quante di queste cadono all'interno della circonferenza $|z| = 3$.

[punteggio 3]

---

L'equazione è equivalente a

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

ovvero

$$e^{2iz} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{i\pi/2}$$

Le soluzioni sono i numeri reali (soluzioni dell'equazione reale $\tan x = 1$)

$$z = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Di queste, solo due, quelle ottenute per $k = 0$ e $k = -1$, cadono all'interno della circonferenza $|z| = 3$.

Esercizio 3 Sviluppare $\arctan z$ in serie di Taylor con centro in $z_0 = 0$.

[punteggio 4]

---

Per la derivata della funzione proposta si ha

$$\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

da cui integrando membro a membro lungo un qualsiasi cammino da 0 a $z$

$$\begin{aligned}\arctan z &= \int_0^z \frac{d\arctan w}{dw}dw \\ &= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^{2n} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z (-1)^n w^{2n} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}\end{aligned}$$

Esercizio 4 Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

[punteggio 4]

Se $f$ è intera e limitata in $\mathbb{C}$, allora $f$ è costante in $\mathbb{C}$. Per la dimostrazione vedi note.

Esercizio 5 Trovare, in tutti i suoi punti singolari isolati, i residui della funzione

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

[punteggio 4]

---

La funzione ha un unico punto singolare isolato in $z = 2$. Usando lo sviluppo notevole

$$\cos w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{2k} \qquad |w| < \infty$$

per $z \in \mathbb{C}$ tale che $|1/(z-2)| < \infty$, cioé nella regione anulare $0 < |z-2| < \infty$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= ((z-2)+2)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(z-2)^{2k}} \\ &= \left((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(z-2)^{2k}} \end{aligned}$$

Da questa espressione risulta che la singolarità è essenziale e

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{(-1)^2}{4!} + 12\frac{(-1)^1}{2!} = \frac{1}{24} - 6 = -\frac{143}{24}$$

Esercizio 6 Trovare la parte singolare della funzione

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z\,\log(1+z^2)}\,.$$

[punteggio 4]

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\,\frac{1+2z+\frac{1}{2}4z^2+\dots}{z^2-\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{3}z^6+\dots} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1+2z+\frac{1}{2}4z^2+\dots\right)\frac{1}{1-(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^4+\dots)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1+2z+\frac{1}{2}4z^2+\dots\right)\left[1+(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^4+\dots)+\dots\right] \\
&= \frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{5}{2z}+O(1)
\end{aligned}$$

Esercizio 7 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$$

[punteggio 4]

---

L'integrale proposto è equivalente all'integrale della funzione complessa $e^{iz}/(iz)$ lungo il cammino $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\gamma(\theta)} \frac{\gamma\,'(\theta)}{i\gamma(\theta)} d\theta = \int_\gamma \frac{e^z}{iz} dz$$

Quest'ultimo integrale si valuta immediatamente con il teorema dei residui

$$\int_\gamma \frac{e^z}{iz} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^z}{iz} = 2\pi i \frac{e^0}{i} = 2\pi$$

Esercizio 8 Determinare il valore del seguente integrale reale (il risultato deve essere espresso in termini di quantità palesemente reali).

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+2\sqrt{3}x+4}dx$$

[punteggio 6]

Si ponga $f(z) = z^{\frac{2}{3}}/(z^2+2\sqrt{3}z+4) = e^{\frac{2}{3}\log z}/(z^2++2\sqrt{3}z+4)$, assumendo per il logaritmo quel ramo il cui asse di diramazione coincide con il semiasse reale positivo

$$\log z = \ln|z| + i\arg z, \qquad |z|>0 \qquad 0<\arg z\leq 2\pi.$$

La $f$ è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale positivo e dei due poli semplici in $z=-\sqrt{3}\pm i$ dove ha residui

$$\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{3}+i} f(z) = \left.\frac{e^{\frac{2}{3}\log z}}{z+\sqrt{3}+i}\right|_{z=-\sqrt{3}+i} = \frac{e^{\frac{2}{3}\ln 2+i\frac{5}{9}\pi}}{2i},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{3}-i} f(z) = \left.\frac{e^{\frac{2}{3}\log z}}{z+\sqrt{3}-i}\right|_{z=-\sqrt{3}-i} = \frac{e^{\frac{2}{3}\ln 2+i\frac{7}{9}\pi}}{-2i}.$$

Si integri la $f$ lungo il cammino chiuso orientato positivamente $\gamma=\lambda_1+\gamma_R+\lambda_2+\gamma_r$, dove $\lambda_1(x)=x+i0$, $r\leq x\leq R$, $\gamma_R(\theta)=Re^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$, $\lambda_2(x)=x-i0$, $R\geq x\geq r$, $\gamma_r(\theta)=re^{i\theta}$, $2\pi\geq\theta\geq 0$. Come al solito, $x\pm i0$ sta a indicare $x\pm i\varepsilon$ con $\varepsilon$ infinitesimo positivo così che in rappresentazione polare $x+i0=xe^{i\varepsilon}$ mentre $x-i0=xe^{i(2\pi-\varepsilon)}$. Per $r<2<R$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_{\lambda_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\lambda_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \\
&= 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{3}+i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{3}-i} f(z)\right] \\
&= \pi e^{\frac{2}{3}\ln 2}\left(e^{i\frac{5}{9}\pi} - e^{i\frac{7}{9}\pi}\right).
\end{aligned}$$

Per i singoli cammini di integrazione risulta

$$\int_{\lambda_1} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3}(\ln x+i0)}}{(xe^{i0})^2+2\sqrt{3}(xe^{i0})+4}e^{i0}dx = \int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3}\ln x}}{x^2+2\sqrt{3}x+4}dx,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\,dz = \int_R^r \frac{e^{\frac{2}{3}(\ln x+i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2+2\sqrt{3}(xe^{i2\pi})+4}e^{i2\pi}dx = -e^{i\frac{4}{3}\pi}\int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3}\ln x}}{x^2+2\sqrt{3}x+4}dx,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \lesssim \frac{e^{\frac{2}{3}\ln R}}{R^2}\,R = \frac{R^{\frac{4}{3}}}{R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \lesssim \frac{e^{\frac{2}{3}\ln r}}{1}\,r = r^{\frac{4}{3}} \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

Pertanto, nel limite $r \to 0$ e $R \to \infty$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4}\ dx &= \pi e^{\frac{2}{3}\ln 2} \frac{e^{i\frac{5}{9}\pi} - e^{i\frac{7}{9}\pi}}{1 - e^{i\frac{4}{3}\pi}} \\
&= \pi 2^{\frac{2}{3}}\ \frac{e^{i\frac{6}{9}\pi}}{e^{i\frac{2}{3}\pi}}\ \frac{e^{-i\frac{1}{9}\pi} - e^{i\frac{1}{9}\pi}}{e^{-i\frac{2}{3}\pi} - e^{i\frac{2}{3}\pi}} \\
&= \pi \sqrt[3]{4}\ \frac{\sin(\pi/9)}{\sin(2\pi/3)} \\
&= \pi 2 \sqrt[3]{4}\ \sin(\pi/9)
\end{aligned}
$$

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 2/B

Cesi/Presilla – A.A. 2008–09

| | |
|---|---|
| Nome | |
| Cognome | |

| | | |
|---|---|---|
| Canale: | Cesi (Astrofisica) | Presilla (Fisica) |

| | | |
|---|---|---|
| Intendo MANTENERE il voto degli esoneri | 3 | 4 |

| problema | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| totale | |
| voto in trentesimi | |

**Regolamento:**

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (5 pt). Nello spazio euclideo $C_2[0,\infty)$ con il prodotto scalare canonico sia $W := \text{span}\{e^{-x},\, x^2 e^{-x}\}$. Calcolare la proiezione ortogonale $\pi_W(x^n\, e^{-x})$, in cui $n$ è un intero non negativo. Verificare la soluzione nei casi $n = 0$ e $n = 2$. (Ricordo[1] che $\int_0^\infty x^n\, e^{-ax}\, dx = n!/a^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$).

*Risp:* $\pi_W(x^n\, e^{-x}) = \frac{n!}{2^n} e^{-x}\Big[1 + \frac{2}{5}\big(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\big)\big(x^2 - \frac{1}{2}\big)\Big]$.

(2) (6 pt). Disegnare il grafico e sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < \pi/2 \\ |x| - \pi/2 & \text{se } |x| \geq \pi/2. \end{cases}$$

Scrivere, oltre allo sviluppo completo, tutti i termini fino a $k = 7$ *in modo esplicito*, vale a dire

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \cdots + a_7 \cos(7x) + \cdots$$

Calcolo i coefficienti della serie di Fourier

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\pi}{4} \\ a_k &= \frac{2}{\pi k^2}\Big[(-1)^k - \cos(k\pi/2)\Big] \\ b_k &= 0\,. \end{aligned}$$

Poichè

$$\cos(k\pi/2) = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } k = 2n \\ 0 & \text{se } k = 2n-1 \end{cases}$$

posso scrivere

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{1}{2\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right] \\ a_{2n-1} &= -\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\,. \end{aligned}$$

Il termine $a_{2n}$ è diverso da zero solo se $n$ è dispari $n = 2j - 1$, quindi può essere riscritto come

$$a_{4j-2} = \frac{1}{\pi(2j-1)^2}\,.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big[-\frac{2\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2} + \frac{\cos[(4k-2)x]}{(2k-1)^2}\Big] \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{\cos(2x)}{\pi} - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) - \frac{2}{25\pi}\cos(5x) \\ &+ \frac{1}{9\pi}\cos(6x) - \frac{2}{49\pi}\cos(7x) + \cdots \end{aligned}$$

(3) (6 pt). Sia $T$ l'operatore su $\ell_2$ definito come

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_1}{3}, \frac{x_3}{5}, \frac{x_3}{7}, \frac{x_5}{9}, \frac{x_5}{11}, \ldots\right)$$

(a) Determinare $\|T\|$.

(b) Determinare $T^*$. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$.

[1] nella remota eventualità che qualcuno lo avesse dimenticato

(c) Trovare gli autovalori di $T$. Scrivere esplicitamente i 3 autovalori più grandi in modulo e, per ognuno di essi, trovare un autovettore corrispondente.

*Risp:* (a) $\|T\| = \sqrt{10}/3$.

(b) $T^* x = \big(x_1 + x_2/3,\ 0,\ x_3/5 + x_4/7,\ 0,\ x_5/9 + x_6/11,\ 0,\ \ldots\big)$.

(c) $\sigma_p(T) = \{0\} \cup \{(4k+1)^{-1} : k = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. All'autovalore 0 corrisponde, ad esempio, l'autovettore

$$x = (0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)\,,$$

all'autovalore $(4k+1)^{-1}$ corrisponde l'autovettore

$$x = (0, 0, \ldots, 0, 0, 4k+3, 4k+1, 0, 0, \ldots)$$

in cui gli unici due elementi non nulli si trovano in posizione $2k+1$ e $2k+2$. Riporto i 3 autovalori più grandi in modulo con i rispettivi autovettori

$$\begin{array}{ll} \lambda = 1 & x = (3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) \\ \lambda = \dfrac{1}{5} & x = (0, 0, 7, 5, 0, 0, 0, 0, \ldots) \\ \lambda = \dfrac{1}{9} & x = (0, 0, 0, 0, 11, 9, 0, 0, \ldots) \end{array}$$

(4) (4 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato

$$D^3[e^{3x}\, D^4(|x|)]\,.$$

*Soluzione.* Poichè $|x|' = \mathrm{sgn}(x)$ si ha $|x|'' = 2\delta_0$. Dunque

$$e^{3x}\, D^4(|x|)] = e^{3x}\, \delta_0'' = \delta_0'' - 6\delta_0' + 9\delta_0\,.$$

Quindi

$$D^3[e^{3x}\, D^4(|x|)] = \delta_0^{(5)} - 6\delta_0^{(4)} + 9\delta_0^{(3)}\,.$$

(5) (4 pt). Dire se l'operatore derivata

$$(Df)(x) := f'(x)$$

agente sullo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (spazio di Schwarz o delle funzioni $C^\infty$ rapidamente decrescenti), è limitato (dimostrare).

*Soluzione.* (a) $D$ non è limitato. Infatti, si consideri la successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$f_n(x) := e^{-nx^2}\,.$$

Allora si ha

$$\|f_n\|_u := \sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{-nx^2}| = 1$$

mentre

$$\|Df_n\|_u := \sup_{x\in\mathbb{R}} |2nx\, e^{-nx^2}|\,.$$

Per stimare dal basso questo sup scegliamo $x = 1/\sqrt{n}$. Quindi

$$\|Df_n\|_u \geq \left| \frac{2n}{\sqrt{n}} e^{-1} \right| = \frac{2}{e} \sqrt{n} \, .$$

Di conseguenza si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|Df_n\|_u}{\|f_n\|_u} = +\infty \, ,$$

che implica che $D$ è illimitato.

(6) (4 pt). Dire (dimostrandolo) se lo spazio vettoriale $\ell_\infty$ con la norma

$$\|x\| := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|x_k|}{k}$$

è completo.

*Soluzione.* Questo spazio non è completo. Per dimostrarlo trovo una successione di Cauchy non convergente in $\ell_\infty$. Consideriamo la successione (di successioni) definita come

$$x^{(n)} := \Big(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-1}, \sqrt{n}, 0, 0, 0, \ldots\Big) \, .$$

Ciascun elemento $x^{(n)}$ appartiene a $\ell_\infty$ (appartiene addirittura a $\ell_f$) perchè

$$\sup_k |x_k^{(n)}| = \sqrt{n} \, .$$

Per far vedere che la successione $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ è di Cauchy rispetto alla norma defnita nel testo del problema, stimo la quantità $\|x^{(n)} - x^{(j)}\|$. Supponendo che sia (ad esempio) $n > j$, si ha

$$x^{(n)} - x^{(j)} = \Big(0, 0, \ldots, 0, \sqrt{j+1}, \sqrt{j+2}, \ldots, \sqrt{n-1}, \sqrt{n}, 0, 0, 0, \ldots\Big) \, ,$$

per cui

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} - x^{(j)}\| &= \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(j)}|}{k} \\ &= \sup_{k \in \{j+1, \ldots, n\}} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{j+1}} \, . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che se $n, j \geq N$ si ha

$$\|x^{(n)} - x^{(j)}\| \leq \frac{1}{\sqrt{N+1}} \, ,$$

per cui la successione è di Cauchy. D'altra parte la successione $(x^{(n)})$ converge evidentemente all'elemento $x = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots)$ che <u>non</u> appartiene allo spazio vettoriale $\ell_\infty$. $\square$

(7) (4 pt). Sia $P$ una proiezione ortogonale sullo spazio di Hilbert $V$. Dimostrare (a partire dalla definizione di proiezione ortogonale) che $\|P\| \leq 1$.

*Soluzione.* Utilizzando le proprietà $P = P^*$ e $P^2 = P$ ed, in seguito, la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz, si ottiene, per ogni $u \in V$,

$$\|Pu\|^2 = \langle Pu, Pu \rangle = \langle P^* Pu, u \rangle = \langle P^2 u, u \rangle = \langle Pu, u \rangle \leq \|Pu\| \, \|u\| \, .$$

Dividendo per $\|Pu\|$ si ha

$$\|Pu\| \leq \|u\| \qquad \forall u \in V \, ,$$

che implica $\|P\| \leq 1$.