MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 22 gennaio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^3 + 3z + 5 = 0$$

hanno modulo strettamente maggiore di 1. Si ragioni per assurdo.

[punteggio 5]

Sia z_0 una soluzione dell'equazione $z^3+3z+5 = 0$ e si supponga, per assurdo, che risulti $|z_0| \leq 1$. Poiché $z_0 = (-5 - z_0^3)/3$, possiamo minorare $|z_0|$ come

$$|z_0| \geq \frac{\big||-5| - |-z_0^3|\big|}{3} \geq \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Siamo così giunti ad una contraddizione, deve pertanto essere $|z_0| > 1$.
Alternativamente, si ponga $f(z) = z^3 + 5$ e $g(z) = 3z$ e si osservi che le funzioni intere f e g sono tali che $|f(z)| \geq |g(z)|$ sulla circonferenza $|z| = 1$. Per il teorema di Rouché le funzioni f e $f+g$ hanno lo stesso numero di zeri all'interno del cerchio $|z| < 1$. I tre zeri di $f(z)$ sono esterni a tale cerchio dunque $f(z) + g(z) = 0$ non ha soluzioni $|z| < 1$.

<u>Esercizio 2</u> Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$. Motivando la risposta, determinare se nello spazio metrico $(\mathbb{Q}, d)$ con $d(x, y) = |x - y|$ l'insieme A risulta a) aperto, b) chiuso, c) completo.

[punteggio 5]

---

a) A è aperto in $(\mathbb{Q}, d)$. Infatti $\forall x \in A$, posto $r = \max\left(\left|x - \sqrt{2}\right|, \left|x - \sqrt{3}\right|\right)$, si consideri la palla aperta $B(x, r/2) = \{y \in \mathbb{Q} : d(x, y) < r/2\}$. Evidentemente risulta $B(x, r/2) \subset A$.

b) A è chiuso in $(\mathbb{Q}, d)$. Infatti, poiché $\sqrt{2}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ il complementare di A è $A^c = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{3}\}$. Evidentemente A^c è aperto in $(\mathbb{Q}, d)$ in quanto unione di due insiemi aperti in $(\mathbb{Q}, d)$.

c) A non è completo. Si consideri infatti il cosiddetto metodo babilonese per calcolare le radici quadrate mediante una successione di numeri razionali. Esplicitamente si consideri la successione monotona decrescente $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ definita ricorsivamente da $x_{k+1} = (x_k + 2/x_k)/2$ con $x_0 = 1$. Tale successione è una successione di Cauchy in A che converge a $\sqrt{2} \notin A$.

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}}$$

assumendo per $f(z)$ il ramo corrispondente al ramo di $\log z$ che ha come linea di diramazione il semiasse immaginario positivo.

[punteggio 6]

Le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono intere, pertanto i punti di non analiticità di f sono tutti e solo quelli determinati dalla radice

$$\sqrt{\cos z} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(\cos z)\right).$$

La linea di diramazione del ramo scelto di $\log(\cos z)$ è determinata dall'equazione

$$\cos z = \mathrm{i}t, \qquad 0 \le t < \infty.$$

L'equazione risulta equivalente a

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^2 - 2\mathrm{i}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0,$$

la cui soluzione è

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{i}t + \sqrt{(\mathrm{i}t)^2 - 1} = \mathrm{i}\left(t \pm \sqrt{t^2+1}\right).$$

Osservando che, al variare di $0 \le t < \infty$, la soluzione $t+\sqrt{t^2+1}$ rappresenta il semiasse reale $[1, \infty)$ mentre $t - \sqrt{t^2+1}$ il segmento reale $[-1, 0)$, si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} z(t) &= -\mathrm{i}\log\left[\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right] \\ &= (1/2 + 2k)\pi - \mathrm{i}\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right), \qquad t \in [0, \infty), \qquad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= -\mathrm{i}\log\left[\left(\sqrt{t^2+1} - t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\right] \\ &= (-1/2 + 2k)\pi - \mathrm{i}\ln\left(\sqrt{t^2+1} - t\right), \qquad t \in [0, \infty), \qquad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Tali punti rappresentano gli assi immaginari negativi passanti per $z = (1/2 + 2k)\pi$ e gli assi immaginari positivi passanti per $z = (-1/2 + 2k)\pi$.

Esercizio 4 Sia $f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$ con $|\mathrm{Im}\, f'(z)|$ funzione limitata in $\mathbb{C}$. Dimostrare che $f(z) = a + bz$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

[punteggio 6]

Si ponga $g(z) = \exp[-\mathrm{i} f'(z)]$. La funzione g è analitica in $\mathbb{C}$ e il suo modulo

$$|g(z)| = \exp[\mathrm{Re}(-\mathrm{i} f'(z))] = \exp[\mathrm{Im}(f'(z))]$$

è una funzione limitata in $\mathbb{C}$. Per il teorema di Liouville possiamo quindi affermare che $g(z)$ è costante in $\mathbb{C}$. Segue che anche $f'(z)$ è costante in $\mathbb{C}$, diciamo $f'(z) = b$ con $b \in \mathbb{C}$. Da ciò possiamo dedurre che $f(z) = bz + h(z)$ con $h'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. D'altro canto $h(z) = f(z) - bz$ è anche analitica in $\mathbb{C}$ e pertanto costante in $\mathbb{C}$, diciamo $h(z) = a$ con $a \in \mathbb{C}$.

Esercizio 5 Stabilire se esiste $\lim_{z\to 0} f'''(z)$, dove

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)}.$$

In caso affermativo determinare il valore di tale limite.

[punteggio 5]

La funzione $f(z)$ ha un polo semplice in $z = 2$ e uno doppio in $z = 1$ ed è altrove analitica. Pertanto $f(z)$ e tutte le sue derivate sono analitiche in $z = 0$. In particolare $f'''(z)$ è continua in $z = 0$ e risulta

$$\lim_{z\to 0} f'''(z) = f'''(0).$$

Il modo più rapido per determinare il valore di $f'''(0)$ è il seguente. Nella regione $0 < |z| < 1$ la funzione $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor e, ricordando il risultato notevole della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right)^2 \left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2z^n}\left(1+2z+3z^2+4z^3+\dots\right)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2}z+\frac{17}{4}z^2+\frac{49}{8}z^3+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{17}{8}z^2-\frac{49}{16}z^3+O(z^4).
\end{aligned}$$

Da questa espressione e dall'unicità dello sviluppo in serie di Taylor segue immediatamente

$$f'''(0) = -\frac{49}{16}3! = -\frac{147}{8}.$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x.$$

[punteggio 6]

Posto $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/(z(z^2+1))$ e detto $\gamma = \lambda_1+\gamma_R+\lambda_2+\gamma_\rho$ il cammino chiuso di integrazione, dove $\lambda_1(x) = x$, $\rho \le x \le R$, $\gamma_R(\theta) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, $\lambda_2(x) = -x$, $R \ge x \ge \rho$, e $\gamma_\rho(\theta) = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\pi \ge \theta \ge 0$, poiché f è, per $R > 1$ e $\rho < 1$, analitica su e dentro γ ad eccezione del polo semplice in $z = \mathrm{i}$, il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z+\mathrm{i})}\right|_{z=\mathrm{i}} \\
&= -\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-1}.
\end{aligned}$$

Per gli integrali sui cammini che compongono γ si ha

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_\rho^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^\rho \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = -\int_\rho^R \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi R}{R(R^2-1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Per valutare l'integrale su γ_ρ si osservi che, avendo f un polo semplice in $z = 0$, per $0 < |z| < 1$ possiamo porre $f(z) = g(z) + z^{-1}\operatorname{Res}_{z=0} f(z)$ con $g(z)$ analitica in $|z| < 1$. Inoltre

$$\left|\int_{\gamma_\rho} g(z)\mathrm{d}z\right| \le \pi\rho \sup_{z\in\{\gamma_\rho\}} |g(z)| \xrightarrow{\rho\to 0} 0,$$

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_\pi^0 \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi,$$

e quindi

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{\rho\to 0} -\mathrm{i}\pi\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\mathrm{i}\pi\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}\right|_{z=0} = -\mathrm{i}\pi.$$

In conclusione, nel limite $\rho \to 0$ e $R \to \infty$ si ha

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi = -\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-1},$$

ovvero

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova B4 – 22 gennaio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se $\|\cdot\|$ è una norma nello spazio vettoriale indicato.

a) $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{1/2}}, \qquad x \in \ell_2(\mathbb{R})$

b) $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \qquad f \in C_1(\mathbb{R})$

c) $\|x\| = |x_1| + |x_1 + x_2 + x_3|, \qquad x \in \mathbb{R}^3$

d) $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \qquad x \in \ell_1(\mathbb{R})$

e) $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \qquad f \in C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$

f) $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|, \qquad x \in \overline{\mathrm{span}(\ell_f(\mathbb{R}))}$

[punteggio 6]

---

a) No. Si prenda $x = (x_1, x_2, \dots)$ con $x_k = 1/(\sqrt{k}(\log k)^{2/3})$. Risulta $x \in \ell_2(\mathbb{R})$ in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{4/3}} < \infty$$

mentre

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{1/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{2/3}} = \infty.$$

b) No. Esistono funzioni $f \in C_1(\mathbb{R})$ non limitate. Si può scegliere, ad esempio, f come una funzione sempre nulla tranne che per dei picchi di forma triangolare centrati sugli interi positivi. Il picco k-simo centrato su $x = k$ è un triangolo di base $1/k^3$ e altezza k.
c) No. Se $x = (0, 1, -1)$ si ha $\|x\| = 0$.
d) Si. Risulta $\ell_1 \subset \ell_\infty$ e $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ spazio vettoriale normato.
e) Si. Risulta $C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}) \subset C_2(\mathbb{R})$ e $(C_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ spazio vettoriale normato.
f) No. Si consideri $x = (x_1, x_2, \dots)$ con $x_k = 1/k$. Risulta $x \in \overline{\mathrm{span}(\ell_f(\mathbb{R}))} = \ell_0(\mathbb{R})$ mentre $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \infty$.

Esercizio 2 Sia W un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert separabile $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dimostrare che ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come

$$v = w + z, \qquad w \in W, \quad z \in W^{\perp}.$$

Omettere la dimostrazione dell'univocità di tale decomposizione.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 95.

<u>Esercizio 3</u> Sia $A \in \mathcal{L}(V)$ un operatore lineare limitato nello spazio Euclideo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dimostrare che $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

[punteggio 5]

Sapendo che la norma del prodotto di due operatori è minore o uguale al prodotto delle norme degli stessi operatori e utilizzando la proprietà $\|A^*\| = \|A\|$, si ha immediatamente

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \ \|A\| = \|A\|^2.$$

Dimostriamo ora che vale la disuaglianza opposta, ovvero $\|A\| \leq \sqrt{\|A^*A\|}$. Si osservi che $\forall v \in V$, con $v \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\|Av\|^2 = \langle Av, Av\rangle = |\langle A^*Av, v\rangle| \leq \|A^*Av\| \ \|v\| &= \frac{\|A^*Av\|}{\|v\|}\|v\|^2 \\
&\leq \left(\sup_{u\neq 0}\frac{\|A^*Au\|}{\|u\|}\right)\|v\|^2 \\
&= \|A^*A\| \ \|v\|^2,
\end{aligned}$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \ \|v\|$ e la definizione di norma di A^*A. Segue immediatamente

$$\|A\| = \sup_{v\neq 0}\frac{\|Av\|}{\|v\|} \leq \sqrt{\|A^*A\|}.$$

Esercizio 4 Dimostrare che nello spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{K}$ vale l'identità tra distribuzioni

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 2\pi\delta(x),$$

dove la serie indica il limite per $n \to \infty$ delle distribuzioni regolari φ_{g_n} con $g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

[punteggio 6]

Usiamo la notazione in cui la distribuzione regolare φ_{g_n} viene confusa con la corrispondente funzione $g_n(x)$. Per definizione

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

Per $x \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^k - 1 \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} - 1 \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2})} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(n+1)}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2})} - 1 \\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1/2)}}{2\mathrm{i}\sin(x/2)} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(n+1/2)}}{2\mathrm{i}\sin(x/2)} - 1 \\
&= \frac{\sin(x/2)+\sin(x(n+1/2))}{\sin(x/2)} - 1 \\
&= \frac{\sin(x(n+1/2))}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Utilizzando il risultato noto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{\pi x} f(x)\mathrm{d}x = f(0), \qquad \forall f \in \mathcal{K},$$

ovvero in termini di distribuzioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x} = \delta(x),$$

e osservando che per $x \simeq 0$ si ha $\sin(x/2) \simeq x/2$, concludiamo che

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x(n+1/2))}{\sin(x/2)} = 2\pi\delta(x).$$

Si osservi che l'identità così ottenuta è formalmente la rappresentazione in serie di Fourier di $2\pi\delta(x)$.

Esercizio 5 Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione $f(x)=\operatorname{sgn}(x)\exp(x)$ e studiare la convergenza puntuale della serie così ottenuta.

[punteggio 5]

Si ha

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}(x)e^x\cos(kx)dx=\frac{2(-1+(-1)^k\cosh\pi)}{\pi(1+k^2)},$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}(x)e^x\sin(kx)dx=\frac{2k(1-(-1)^k\cosh\pi)}{\pi(1+k^2)},$$

quindi

$$\operatorname{sgn}(x)e^x\sim\frac{\cosh\pi-1}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1+(-1)^k\cosh\pi)}{\pi(1+k^2)}(\cos(kx)-k\sin(kx))$$

Il prolungamento periodico da $(-\pi,\pi]$ a $\mathbb{R}$ di $f(x)$ è una funzione continua a tratti, con punti di discontinuità in 0 e $\pm\pi$. Pertanto la serie trigonometrica sopra scritta converge puntualmente a $f(x)$ per $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ mentre per $x=0$ e $x=\pm\pi$ converge rispettivamente a $(f(0^+)+f(0^-))/2=0$ e $(f(\pm\pi^+)+f(\pm\pi^-))/2=\sinh\pi$.

Esercizio 6 Sia θ_- l'operatore di traslazione a sinistra che agisce nello spazio di Banach complesso $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$

$$\theta_-(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots), \qquad (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di θ_- ricordando che $\|\theta_-\| = 1$.

[punteggio 6]

Studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - \theta_-$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI - \theta_-)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI - \theta_-)x = 0$ è soddisfatta per $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ solo da $x = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - \theta_-)x = 0$ implica

$$z x_k = x_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

ovvero $x = (x_1, z x_1, z^2 x_1, z^3 x_1, \dots)$ con $x_1 \in \mathbb{C}$. Per capire se una successione così fatta appartiene a $\ell_2(\mathbb{C})$ valutiamo

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| z^{k-1} x_1 \right|^2 = |x_1|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{2(k-1)} = |x_1|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \\ &= \begin{cases} |x_1|^2 / (1 - |z|^2) & |z| < 1 \\ \infty & |z| \geq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dunque se $|z| < 1$, z è un autovalore con infiniti autovettori degeneri della forma $x = x_1(1, z, z^2, z^3, \dots)$, $x_1 \in \mathbb{C}$. Per $|z| \geq 1$, l'operatore $zI - \theta_-$ è iniettivo. Si conclude che $\sigma_p(\theta_-) = B(0, 1)$.
Per determinare lo spettro continuo, anziché studiare direttamente la suriettività di $zI - \theta_-$, si osservi che

$$\sigma(\theta_-) \subset \overline{B}(0, \|\theta_-\|) = \overline{B}(0, 1).$$

D'altro canto risulta

$$B(0, 1) = \sigma_p(\theta_-) \subset \sigma_p(\theta_-) \cup \sigma_c(\theta_-) = \sigma(\theta_-),$$

da cui, prendendo la chiusura di entrambi i membri, si ha

$$\overline{B(0, 1)} \subset \overline{\sigma(\theta_-)}.$$

Ora si osservi che lo spettro è un insieme chiuso di $\mathbb{C}$ e che la chiusura della palla $B(0, 1)$ coincide con la palla chiusa $\overline{B}(0, 1)$, pertanto

$$\overline{B}(0, 1) \subset \sigma(\theta_-).$$

Dalle due relazioni opposte, $\sigma(\theta_-) \subset \overline{B}(0, 1)$ e $\overline{B}(0, 1) \subset \sigma(\theta_-)$, si conclude che $\sigma(\theta_-) = \overline{B}(0, 1)$ e quindi

$$\sigma_c(\theta_-) = \sigma(\theta_-) \setminus \sigma_p(\theta_-) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}.$$

L'operatore $zI - \theta_-$ è suriettivo e iniettivo, quindi invertibile, per $|z| > 1$.