MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2008/2009 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 22 Maggio 2009

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Sia $f(z)$ analitica su e dentro il cammino chiuso semplice γ e sia z_0 un punto non appartenente a $\{\gamma\}$. Dimostrare che

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\ dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\ dz$$

[punteggio 5]

Se z_0 è interno a γ allora valgono le formule integrali di Cauchy

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\ dz = 2\pi i f'(z_0) \qquad \int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\ dz = 2\pi i f'(z_0)$$

da cui l'asserto.
Se z_0 è esterno a γ allora le funzioni

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \qquad \frac{f'(z)}{z-z_0}$$

sono analitiche su e dentro γ e per il teorema di Cauchy-Goursat

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\ dz = 0 \qquad \int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\ dz = 0$$

e quindi l'ugualianza tra i due integrali è ancora assicurata.

Esercizio 2 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}dz$$

dove γ è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario.

[punteggio 6]

Posto $z = re^{i\theta}$, il ramo principale di $F(z) = 2\sin(z^{1/2})$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz}2\sin(z^{1/2}) = \cos(z^{1/2})z^{-1/2}$$

Posto $\gamma_\varepsilon = \{z(\varphi) = Re^{i\varphi},\ -(\pi-\varepsilon) \le \varphi \le \pi-\varepsilon\}$, per $z \in \{\gamma_\varepsilon\}$ la funzione $F(z)$ è una primitiva della funzione integranda $\cos\sqrt{z}/\sqrt{z}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sin(z^{1/2})\right]_{z=Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sin(R^{1/2}e^{i(\pi-\varepsilon)/2}) - 2\sin(R^{1/2}e^{-i(\pi-\varepsilon)/2})\right) \\
&= 2\sin(i\sqrt{R}) - 2\sin(-i\sqrt{R}) \\
&= 4\sin(i\sqrt{R}) \\
&= 4i\sinh\sqrt{R}
\end{aligned}$$

<u>Esercizio 3</u> Assumendo il ramo principale delle funzioni polidrome, determinare fino all'ordine z^4 compreso, lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z = 0$ della funzione

$$\log\left((\cos z)^{1/z^2}\right)$$

[punteggio 6]

Si osservi che

$$\begin{aligned}
\log\left((\cos z)^{1/z^2}\right) &= \log\left(\exp\left(\frac{1}{z^2}\log(\cos z)\right)\right) \\
&= \frac{1}{z^2}\log\left[1+\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\right)\right] \\
&= \frac{1}{z^2}\left[\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\right)^2+\dots\right] \\
&= -\frac{1}{2}-\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{45}z^4+\dots
\end{aligned}$$

avendo usato gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} \qquad |z|<\infty$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \qquad |z|<1$$

Si osservi che la funzione presenta una singolarità eliminabile in $z = 0$.

Esercizio 4 Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

[punteggio 5]

Sia $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ con $z, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora esiste almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_0) = 0$.
Si supponga, per assurdo, che $P_n(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Segue che la funzione $f(z) = 1/P_n(z)$ è intera. Tale funzione è anche limitata. Infatti $\lim_{z\to\infty} P_n(z) = \infty$ in quanto non è possibile limitare $|P_n(z)|$ con alcuna costante finita. Segue che $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ cioè $\exists R > 0$ tale che $|f(z)| < 1$ se $|z| > R$. D'altro canto $|f(z)|$ è una funzione continua e dunque limitata nel compatto $|z| \leq R$. Essendo f analitica e limitata in $\mathbb{C}$, per il teorema di Liouville si giunge all'assurdo che essa è costante in $\mathbb{C}$. Deve quindi esistere almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_0) = 0$.

<u>Esercizio 5</u> Sviluppare in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z + z^3}$$

intorno a $z = i$ nelle due regioni anulari $0 < |z - i| < 1$ e $2 < |z - i| < \infty$. Infine calcolare il residuo della funzione in $z = i$.

[punteggio 5]

(a) Per $0 < |z - i| < 1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-i)(z+i)} \\ &= \frac{1}{z-i}\;\frac{1}{i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}}\;\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \\ &= \frac{1}{z-i}\;\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} - \frac{2}{1+\frac{z-i}{i}}\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+z^3} &= \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{2^n i^n} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{i^n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n\left(2^{-(n+1)} - 1\right)(z-i)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2(z-i)} - \frac{3}{4}i + \frac{7}{8}(z-i) + \frac{15}{16}i(z-i)^2 - \frac{31}{32}(z-i)^3 + \dots \end{aligned}$$

Da questa espressione risulta

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{z+z^3} = -\frac{1}{2}$$

(b) Per $2 < |z - i| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-i)(z+i)} \\ &= \frac{1}{(z-i)^3}\;\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}}\;\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} \\ &= \frac{1}{(z-i)^3}\left(\frac{2}{1+\frac{2i}{z-i}} - \frac{1}{1+\frac{i}{z-i}}\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+z^3} &= \frac{1}{(z-i)^3}\left(2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n i^n}{(z-i)^n} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{i^n}{(z-i)^n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n\left(2^{(n+1)} - 1\right)(z-i)^{-n-3} \\ &= \frac{1}{(z-i)^3} - \frac{3i}{(z-i)^4} - \frac{7}{(z-i)^5} + \frac{15i}{(z-i)^6} + \dots \end{aligned}$$

Esercizio 6 Determinare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)+3}{x^2+1}dx$$

[punteggio 6]

Si consideri la funzione complessa $f(z) = (ze^{iz}+3)/(z^2+1)$ che ha poli semplici in $z = \pm i$ e la si integri lungo il perimetro γ, orientato positivamente, del quadrato di vertici $-R_1$, R_2, $R_2 + i(R_1 + R_2)$, $-R_1 + i(R_1 + R_2)$, con $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ e $R_1 + R_2 1$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{ie^{-1}+3}{2i} = \pi(3 + i/e)$$

Poiché $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, dove $\lambda_1(x) = x$ con $-R_1 \leq x \leq R_2$, $\lambda_2(y) = R_2 + iy$ con $0 \leq y \leq R_1 + R_2$, $\lambda_3(x) = x + i(R_1 + R_2)$ con $R_2 \geq x \geq -R_1$ e infine $\lambda_4(y) = -R_1 + iy$ con $R_1 + R_2 \geq y \geq 0$, si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\lambda_k} f(z)dz$$

I singoli integrali valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)dz = \int_{-R_1}^{R_2} \frac{xe^{ix}+3}{x^2+1}dx$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)dz = \int_{0}^{R_1+R_2} \frac{ye^{iR_2-y}+3}{(R_2+iy)^2+1}idy \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0$$

$$\int_{\lambda_3} f(z)dz = \int_{R_2}^{-R_1} \frac{xe^{ix-(R_1+R_2)}+3}{(x+i(R_1+R_2))^2+1}dx \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0$$

$$\int_{\lambda_4} f(z)dz = \int_{R_1+R_2}^{0} \frac{ye^{-iR_1-y}+3}{(-R_1+iy)^2+1}idy \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}+3}{x^2+1}dx = \pi(3 + i/e)$$

Prendendo la parte reale e quella immaginaria di questa espressione e osservando che $\cos(x)/(x^2 + 1)$ è pari, si conclude

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)+3}{x^2+1}dx = \pi(3 + 1/e)$$