MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova B1 – 23 giugno 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Sia $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, continua con derivata prima continua a tratti. Dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) e^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x = 0.$$

[punteggio 5]

Poiché f è continua e f' continua a tratti, vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f(x) e^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x = \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k} f(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k} f'(x) \mathrm{d}x.$$

Poiché f è continua e f' continua a tratti, esistono due numeri reali M e M' tali che

$$|f(x)| \leq M, \qquad |f'(x)| \leq M', \qquad \forall x \in [a,b].$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x \right| &\leq \left| \frac{e^{\mathrm{i}kb}}{\mathrm{i}k} f(b) \right| + \left| \frac{e^{\mathrm{i}ka}}{\mathrm{i}k} f(a) \right| + \int_a^b \left| \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k} f'(x) \right| \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{M}{k} + \frac{M}{k} + \frac{M'(b-a)}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

<u>Esercizio 2</u> Determinare se lo spazio vettoriale $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$, dove $\|x\| = \sup_k |x_k| / \sqrt{k}$, è completo. In caso positivo dimostrarlo, in caso negativo fornire un esempio.

[punteggio 5]

Lo spazio vettoriale in questione non è completo. Si consideri la successione di vettori $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ definiti da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \sqrt[4]{k} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Poiché $\left\|x^{(n)}\right\| = \sup_k \left|x_k^{(n)}\right| / \sqrt{k} = \sup_{1 \leq k \leq n} 1/\sqrt[4]{k} = 1$, si ha che $x^{(n)} \in (\ell_\infty, \|\cdot\|)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La successione $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ è di Cauchy. Infatti, posto $m > n$, si ha

$$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\| = \sup_k \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{\sqrt{k}} = \sup_{n+1 \leq k \leq m} \frac{1}{\sqrt[4]{k}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

La successione tuttavia non è convergente nello spazio vettoriale considerato. Infatti, si ha $\lim_{n \to \infty} \left\|x^{(n)} - x\right\| = 0$ con $x = (1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3}, \dots) \notin (\ell_\infty, \|\cdot\|)$.

Esercizio 3 Nello spazio vettoriale $P(\mathbb{R})$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$ sia $W = \mathrm{span}\{x, x^2 + x\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^4$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$. Si ricordi che $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}c_k$ con $c_0 = 1$, $c_1 = 1/2$, $c_2 = 3/4$, $c_3 = 15/8$.

[punteggio 6]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{x, x^2 + x\}$

$$u_1(x) = x$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$u_2(x) = x^2 + x - \frac{\langle x^2 + x, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^2$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Usando il proiettore π_W si ha

$$w = \pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k$$

ovvero

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\langle x^4, x\rangle}{\sqrt{\pi}/2} x + \frac{\langle x^4, x^2\rangle}{3\sqrt{\pi}/4} x^2 \\ &= 0 + \frac{15\sqrt{\pi}/8}{3\sqrt{\pi}/4} x^2 \\ &= \frac{5}{2} x^2. \end{aligned}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^2.$$

Si può verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{2}x^2 \left(x^4 - \frac{5}{2}x^2\right) e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\frac{15\sqrt{\pi}}{8} - \frac{25}{4}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 0.$$

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale (esprimendo, se possibile, il risultato con un numero)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 3^{-|x|}\delta\left(\cos(\pi x/4)\right) \mathrm{d}x.$$

[punteggio 5]

Si ponga $b(x) = \cos(\pi x/4)$. Tale funzione si annulla nei punti

$$x_k = 2(2k+1), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

e in questi punti risulta

$$\left|b'(x_k)\right| = \left|\frac{\pi}{4}\sin(\pi x_k/4)\right| = \frac{\pi}{4}.$$

Pertanto

$$\delta\left(\cos(\pi x/4)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|b'(x_k)|}\delta(x - x_k) = \frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - 2(2k+1)).$$

Segue allora

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} 3^{-|x|}\delta\left(\cos(\pi x/4)\right) \mathrm{d}x &= \frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 3^{-|2(2k+1)|} \\
&= \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-2(2k+1)} \\
&= \frac{8}{\pi 3^2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(3^{-4}\right)^k \\
&= \frac{8}{\pi 3^2}\frac{1}{1-3^{-4}} \\
&= \frac{8}{\pi 3^2}\frac{3^4}{3^4-1} \\
&= \frac{72}{80\pi}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_6}{6}, \frac{x_6}{6}, \dots).$$

Determinare la norma $\|T\|$ e lo spettro di T.

[punteggio 6]

Per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tx\|_2^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_{2k}|^2}{(2k)^2} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}|^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$$

che implica $\|T\| \leq 1/\sqrt{2}$. D'altro canto, per $x = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha $Tx = (1/2, 1/2, 0, 0, \dots)$ e quindi

$$\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{1/2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che implica $\|T\| \geq 1/\sqrt{2}$. In conclusione $\|T\| = 1/\sqrt{2}$.
Studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$, cioè l'equazione agli autovalori $Tx = zx$

$$\frac{x_{2k}}{2k} = zx_{2k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$
$$\frac{x_{2k}}{2k} = zx_{2k}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Se $z = 0$, il sistema di equazioni è soddisfatto per tutti gli $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ tali che $x_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Dunque $z = 0$ è un autovalore infinitamente degenere. Se $z = 1/2n$, $n = 1, 2, \dots$, l'equazione $(zI - T)x = 0$ ammette la soluzione x non banale con componenti $x_{2n} = x_{2n-1} \neq 0$ e $x_k = 0$ per $k \neq 2n, 2n-1$. Dunque T ha per $z = 1/(2n)$ autovalori infinitamente degeneri. Se $z \neq 0$ e $z \neq 1/(2n)$, si ha $x_{2k} = x_{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, quindi $x = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo, ovvero z non è autovalore. Si ha dunque $\sigma_p(T) = \{0, 1/(2n),\ n = 1, 2, \dots\}$.
Studiamo ora la suriettività di $zI - T$ al variare di $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p$. Si vuole determinare $\mathrm{Ran}(zI - T) = \{y \in \ell_2 :\ y = (zI - T)x,\ x \in \ell_2\}$. Deve essere

$$zx_{2k-1} - \frac{x_{2k}}{2k} = y_{2k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$
$$zx_{2k} - \frac{x_{2k}}{2k} = y_{2k}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

e quindi

$$x_{2k} = \frac{y_{2k}}{z - 1/(2k)}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$
$$x_{2k-1} = \frac{y_{2k-1}}{z} + \frac{y_{2k}}{2kz(z - 1/(2k))}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Da queste segue $\|x\|_2^2 \leq C\|y\|_2^2$, con C numero reale dipendente da z. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile. Segue che $\sigma_c(T) = \emptyset$.

Esercizio 6 Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 - x/2, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi/2 - x/2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

e studiare la convergenza puntuale delle serie così ottenuta. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

[punteggio 6]

Risulta $f(-x) = -f(x)$ pertanto

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

dove

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \sin(kx) \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \frac{-\cos(kx)}{k} \bigg|_0^{\pi} - \left(\frac{-x\cos(kx)}{2k} + \frac{\sin(kx)}{2k^2} \right) \bigg|_0^{\pi} \right) \\ &= -\frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k} + \frac{\cos(k\pi)}{k} \\ &= \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

La serie risulta convergente puntualmente a $f(x)$ in $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ mentre in $x = 0$ converge a $(f(0^+) + f(0^-))/2 = 0$.
Per $x = \pi/2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = f(\pi/2) = \frac{\pi}{4}.$$