MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 24 Giugno 2010

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare la derivata della distribuzione regolare φ_g associata alla funzione

$$g(x) = \cos(x)e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x)$$

dove $\chi_{[a,b]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$, cioè $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ se $x \in [a,b]$ e $\chi_{[a,b]}(x) = 0$ altrove.

[punteggio 5]

La funzione g è continua a tratti (questo assicura che φ_g è una distribuzione) con discontinuità nei punti $u_1 = -3$ e $u_2 = 2$ di valore

$$h_1 = g(u_1^+) - g(u_1^-) = \cos(-3)e^{|-3|} = \cos(3)e^3$$
$$h_2 = g(u_2^+) - g(u_2^-) = -\cos(2)e^{|2|} = -\cos(2)e^2$$

La derivata di g esiste continua a tratti (questo assicura che $\varphi_{g'}$ è una distribuzione) e vale

$$\begin{aligned} g'(x) &= \begin{cases} 0 & x < -3 \\ -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} & -3 < x < 0 \\ -\sin(x)e^{x} + \cos(x)e^{x} & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases} \\ &= (-\sin(x) + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\varphi_g' = \varphi_{g'} + e^3\cos(3)\delta_{-3} - e^2\cos(2)\delta_2$$

Alternativamente, osservando che $\chi_{[-3,2]}(x) = H(x+3) - H(x-2)$ essendo H la funzione di Heavyside,

$$\begin{aligned} D[\cos(x)e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x)] &= D[\cos(x)]e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)D[e^{|x|}]\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)e^{|x|}D[\chi_{[-3,2]}(x)] \\ &= -\sin(x)e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)e^{|x|}(\delta_{-3} - \delta_2) \\ &= (-\sin(x) + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + e^3\cos(3)\delta_{-3} - e^2\cos(2)\delta_2 \end{aligned}$$

Esercizio 2 Sia T_k l'operatore lineare limitato definito sullo spazio vettoriale $(C_2[-1,1];\mathbb{C},\|\cdot\|_2)$ da

$$(T_k f)(x) = \left(\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Determinare, dimostrandolo, per quale valore della costante $c \in \mathbb{C}$ si ha che cT_k è una proiezione ortogonale.

[punteggio 5]

Per definizione, l'operatore cT_k è una proiezione ortogonale se e solo se risulta $(cT_k)^* = cT_k$ e $(cT_k)^2 = cT_k$.
Si inizi con l'osservare che T_k è autoaggiunto e $T_k^2 = 2T_k$. L'operatore aggiunto T_k^* è definito da $\langle T_k^* f, g\rangle = \langle f, T_k g\rangle$ con f e g arbitrarie appartenenti allo spazio vettoriale in questione

$$\begin{aligned}
\langle T_k^* f, g\rangle &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx}\overline{g(x)}dx\\
\langle f, T_k g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{\left(\int_{-1}^{1} g(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx}}dx\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x)e^{-ikx}dx\right)e^{iky}\overline{g(y)}dy
\end{aligned}$$

Dalla arbitrarietà di f e g risulta $T_k^* = T_k$. Inoltre, per ogni f appartenente allo spazio vettoriale in questione

$$\begin{aligned}
(T_k^2 f)(x) &= T_k\left(\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx}\\
&= \left(\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right)\left(\int_{-1}^{1} e^{ikz}e^{-ikz}dz\right)e^{ikx}\\
&= 2\left(\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx}\\
&= 2(T_k f)(x)
\end{aligned}$$

ovvero $T_k^2 = 2T_k$.
Poiché $(cT_k)^* = \overline{c}T_k^* = \overline{c}T_k$, la proprietà $(cT_k)^* = cT_k$ è soddisfatta se e solo se $c \in \mathbb{R}$. Poiché $(cT_k)^2 = c^2T_k^2 = c^2 2T_k$, la proprietà $(cT_k)^2 = cT_k$ è soddisfatta se e solo se $2c^2 = c$. Pertanto, ad esclusione del caso banale $c = 0$, cT_k risulta una proiezione unicamente per $c = 1/2$.

Esercizio 3 Definire (i dettagli contano!) una distribuzione su $\mathbb{R}$.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 119.

<u>Esercizio 4</u> Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (\frac{x_2}{\sqrt{2}}, 0, \frac{x_4}{\sqrt{4}}, 0, \frac{x_6}{\sqrt{6}}, 0, \dots)$$

Determinare $\|T\|$, T^* e lo spettro di T.

[punteggio 6]

Per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_{2k}|^2}{2k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{2} \|x\|_2^2$$

che implica $\|T\| \leq 1/\sqrt{2}$. D'altro canto, per $x = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha $Tx = (1/\sqrt{2}, 0, 0, 0, \dots)$ e quindi

$$\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1/\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che implica $\|T\| \geq 1/\sqrt{2}$. In conclusione $\|T\| = 1/\sqrt{2}$.
L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\langle T^*x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (T^*x)_k \overline{y_k}$$
$$\langle x, Ty\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{(Ty)_k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} \frac{\overline{y_{2k}}}{\sqrt{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k-1}}{\sqrt{2k}} \overline{y_{2k}}$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue che $(T^*x)_{2k} = x_{2k-1}/\sqrt{2k}$ e $(T^*x)_{2k-1} = 0$, ovvero

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (0, \frac{x_1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{x_3}{\sqrt{4}}, 0, \frac{x_5}{\sqrt{6}}, \dots)$$

Si studi l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI - T)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI - T)x = 0$ è soddisfatta per $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ solo da $x = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)x = 0$ implica

$$\frac{x_{2k}}{\sqrt{2k}} = z x_{2k-1} \qquad k = 1, 2, \dots$$
$$0 = z x_{2k} \qquad k = 1, 2, \dots$$

- Se $z \neq 0$, si ha $x_{2k} = x_{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, quindi $x = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z = 0$, l'equazione $(zI - T)x = 0$ è soddisfatta per tutti gli $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ tali che $x_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Dunque T ha per $z = 0$ un autovalore infinitamente degenere.

Si studi ora la suriettività di $zI - T$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ran}(zI - T)$ coincide con $\ell_2(\mathbb{C})$ ovvero se $\forall y \in \ell_2(\mathbb{C})$ esiste $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ tale che $(zI - T)x = y$. Affinchè ciò accada deve essere

$$\begin{aligned} zx_{2k-1} - \frac{x_{2k}}{\sqrt{2k}} &= y_{2k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots \\ zx_{2k} &= y_{2k} \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

- Se $z \neq 0$, si ha $x_{2k} = y_{2k}/z$ e $x_{2k-1} = y_{2k-1}/z + y_{2k}/(\sqrt{2k}z^2)$, $k = 1, 2, \ldots$. Da queste segue $\|x\|_2^2 \leq (1/|z|^2 + 1/(2|z|^4)) \|y\|_2^2$ cioè $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ se $y \in \ell_2(\mathbb{C})$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.

Riepilogando, $\sigma_p(T) = \{0\}$, $\sigma_c(T) = \emptyset$, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Esercizio 5 Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = x\sin(x)$. Dimostrare che vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-1} = \frac{1}{4}$$

Si ricordi che $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.

[punteggio 6]

Poiché $f(x) = -f(-x)$ si ha che

$$b_k = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)dx = -\frac{1}{\pi} x\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)dx \\ &= -\frac{1}{\pi}(-\pi-\pi) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(2x)dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{x\cos(2x)}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)dx = -\frac{1}{4\pi}(\pi+\pi) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per $k > 1$ abbiamo infine:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left\{\sin[(k+1)x] - \sin[(k-1)x]\right\}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}x\left[\frac{\cos[(k-1)x]}{k-1} - \frac{\cos[(k+1)x]}{k+1}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\cos[(k-1)x]}{k-1} - \frac{\cos[(k+1)x]}{k+1}\right]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k-1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\right)\right] = (-1)^{k+1}\frac{2}{k^2-1} \end{aligned}$$

Mettendo assieme i coefficienti possiamo scrivere che

$$f(x) = x\sin(x) \sim 1 - \frac{1}{2}\cos(x) + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k^2-1}\cos(kx)$$

$f(x)$ è una funzione 2π-periodica quindi il suo sviluppo converge puntualmente alla $f(x)$ in ogni punto.
Per dimostrare il risultato ci basta porre $x = 0$. Otteniamo:

$$f(0) = 0 = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k^2-1}$$

da cui il risultato.

Esercizio 6   Sia $f(x)$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) ,$$

con $\sigma > 0$. Calcolare la trasformata di Fourier $g(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)$. Enunciare e verificare esplicitamente per $f(x)$ il teorema di Plancherel.

[punteggio 6]

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + i\lambda x\right)\right] dx = \\ &= \frac{\exp\left(-\lambda^2\sigma^2/2\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + i\frac{\lambda\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2\right] dx \end{aligned}$$

Introduco la variabile $z = x/(\sqrt{2}\sigma) + i\lambda\sigma/\sqrt{2}$. Il risultato è

$$g(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) = \exp\left[-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right]$$

Il teorema di Plancherel afferma che $||g||_2 = \sqrt{2\pi}||f||_2$. Il risultato e' immediato verificando che

$$2\pi||f||_2^2 = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\sigma^2} d\lambda = ||g||_2^2$$