MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2007/2008 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 26 Maggio 2008

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplictamente che viola una delle proprietà della norma.

(a) $V = C_1(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$;

(b) $V = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \log(1+x^2)/(1+x^2)dx$;

(c) $V = C^2[a,b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$;

(d) $V = \ell_4$ e $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3}$;

(e) $V = \ell_1$ e $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}$.

[punteggio 5]

(a) No. Esistono funzioni $f \in C_1(\mathbb{R})$ non limitate. Si può scegliere, ad esempio, f come una funzione sempre nulla tranne che per dei picchi di forma triangolare centrati sugli interi positivi. Se il picco k-esimo centrato su $x = k$ è un triangolo di base $1/k^3$ e altezza $2k$ risulta $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 < \infty$.

(b) Sì.

(c) No. Si prenda $f(x) = x$ per la quale risulta $\|f\| = 0$.

(d) No. Si prenda $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ con $x_k = k^{-1/3}$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3} < \infty$$

cioé $x \in \ell_4$ ma

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$

(e) Sì.

Esercizio 2 Dimostrare che $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ è completo.

[punteggio 6]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 68.

Esercizio 3 Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quali le seguenti successioni $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ appartengono a ℓ_2

(a) $x_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ (b) $x_n = n^\alpha e^{-\alpha n}$ (c) $x_n = \dfrac{e^{\alpha+\log(1+n^\alpha)}}{\sqrt{n^\alpha}}$

[punteggio 6]

(a) $\alpha \in (1/2, \infty)$ (b) $\alpha \in (0, \infty)$ (c) mai

Esercizio 4 Dimostrare che ℓ_f non è denso in $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

[punteggio 5]

Si consideri la successione $\hat{x} = (1, 1, 1, ...)$ di ℓ_∞. Se y è una generica successione di ℓ_f per definizione $\exists N$ tale che $y_k = 0$ $\forall k > N$. Quindi

$$\|\hat{x} - y\|_\infty = \sup_k |\hat{x}_k - y_k| \geq \sup_{k>N} |\hat{x}_k - y_k| = 1.$$

Questo dimostra che

$$\|\hat{x} - y\|_\infty \geq 1 \qquad \forall y \in \ell_f.$$

Di conseguenza $\hat{x}$ è un elemento di ℓ_∞ che non appartiene alla chiusura ℓ_f. Quindi ℓ_f non è denso in ℓ_∞.

Esercizio 5 Dimostrare che $v_1(x) = \sin x$, $v_2(x) = \cos x$ e $v_3(x) = e^{i3x}$ sono vettori linearmente indipendenti in $C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, spazio vettoriale delle funzioni continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$.

[punteggio 5]

Dobbiamo dimostrare che la combinazione lineare

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 e^{i3x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

con coefficienti $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ è soddisfatta solo per $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Tale combinazione valuata per $x = 0$ e $x = \pi$, nonché la sua derivata rispetto a x valutata per $x = 0$, forniscono

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0, \\ c_1 - ic_3 &= 0, \\ c_1 + i3c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sottraendo alla terza equazione la seconda si ha $c_3 = 0$, che sostituito nelle prime due equazioni fornisce $c_2 = 0$ e $c_1 = 0$.

Esercizio 6 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,1]$ con prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ sia $W = \operatorname{span}\{x, x^3\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^2$ in

$$v = w + z, \qquad \text{con } w \in W \text{ e } z \in W^{\perp}.$$

[punteggio 6]

Si ortogonalizzi il sistema di vettori x, x^3:

$$u_1(x) = x,$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{4}{175}.$$

Usando il proiettore π_W

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k,$$

si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x^2, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k(x) = \frac{3}{4}x + \frac{35}{48}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{35}{48}x^3 + \frac{5}{16}x$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = -\frac{35}{48}x^3 + x^2 - \frac{5}{16}x.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^1 \left(\frac{35}{48}x^3 + \frac{5}{16}x\right)\left(-\frac{35}{48}x^3 + x^2 - \frac{5}{16}x\right) dx = 0.$$