MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 26 settembre 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f(z)$ per $|z| < R$. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ risulta

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} w^{-jm} f(w^m z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j+nk} z^{j+nk},$$

dove $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}$ e $|z| < R$. Suggerimento: si calcoli esplicitamente il membro di sinistra.

[punteggio 6]

Poiché $|w| = 1$, per $|z| < 1$ si ha $|w^m z| < R$ e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} w^{-jm} f(w^m z) &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} w^{-jm} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{mk} z^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} w^{m(k-j)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-j)/n}\right)^m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \begin{cases} 1 & (k-j)/n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},
\end{aligned}$$

dove, per $(k-j)/n \in \mathbb{Z}$ si è usato il fatto che

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-j)/n}\right)^m = 1^m = 1,$$

mentre per $(k-j)/n \notin \mathbb{Z}$ si è utilizzata la formula

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-j)/n}\right)^m = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-j)/n}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-j)/n}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-j)}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-j)/n}} = 0.$$

Osservando che k è un intero, 0 incluso, mentre $0 \le j/n < 1$, si ha che $(k-j)/n \in \mathbb{Z}$ se solo se $k - j = qn$, con $q = 0, 1, 2, \ldots$. In conclusione,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} w^{-jm} f(w^m z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sum_{q=0}^{\infty} \delta_{k-j,qn} \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} a_{j+qn} z^{j+qn}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 Dimostrare che

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0.$$

[punteggio 5]

Si veda testo di riferimento, Teorema 3.9

<u>Esercizio 3</u> Determinare, usando le condizioni di Cauchy-Riemann, il dominio di analiticità della seguente funzione e calcolarne la derivata prima:

$$f(z) = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2},$$

dove $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$ e $r \geq 0$.

[punteggio 5]

Posto $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$, si ha

$$u(r,\theta) = \sqrt{r}\cos(\theta/2), \qquad v(r,\theta) = \sqrt{r}\sin(\theta/2).$$

Si osservi che per ogni $r > 0$ si ha $v(r,\pi) \neq \lim_{\theta\to-\pi} v(r,\theta)$, pertanto lungo il semiasse reale negativo, origine esclusa, f risulta non continua e quindi non derivabile. In $z = 0$ f è continua ma non derivabile, come risulta facilmente dalle rispettive definizioni. Per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_r(r,\theta) &= \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos(\theta/2), \qquad & u_\theta(r,\theta) &= -\frac{\sqrt{r}}{2}\sin(\theta/2), \\ v_r(r,\theta) &= \frac{1}{2\sqrt{r}}\sin(\theta/2), \qquad & v_\theta(r,\theta) &= \frac{\sqrt{r}}{2}\cos(\theta/2), \end{aligned}$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Nello stesso dominio $f(z)$ risulta quindi derivabile e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r,\theta) + \mathrm{i}v_r(r,\theta))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}}\left(\cos(\theta/2) + \mathrm{i}\sin(\theta/2)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= \frac{1}{2f(z)}. \end{aligned}$$

Il dominio di analiticità di f è $D = \{z \in \mathbb{C} : \; z \neq -t, \; t \in [0,\infty)\}$.

Esercizio 4 Determinare il residuo in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \int_2^3 \frac{t^2 \sin t}{t - 1/z} \mathrm{d}t.$$

[punteggio 6]

La funzione $f(z)$ è analitica per $z \neq 0$ e $z \notin [1/3, 1/2]$. Pertanto, nell'anello $A(0, 0, 1/3)$ ammette lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_2^3 \frac{t^2 \sin t}{t - 1/z} \mathrm{d}t \\ &= \int_2^3 \frac{t^2 \sin t}{-1/z(1 - (tz))} \mathrm{d}t \\ &= \int_2^3 \frac{t^2 \sin t}{-1/z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (tz)^k \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} \left(- \int_2^3 t^{k+2} \sin t \mathrm{d}t \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(- \int_2^3 t^{n+1} \sin t \mathrm{d}t \right). \end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

Si osservi che f ha in $z = 0$ una singolarità eliminabile.

<u>Esercizio 5</u> Siano $a, b \in \mathbb{C}$ e $p, q \in \mathbb{N}$. Stabilire, tra i coefficienti a, b, p, q, una condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione

$$f(z) = a\frac{\sin z}{z^{p+1}} - b\frac{\cos z}{z^{q+1}}$$

abbia una primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Discutere esplicitamente i due casi $p = q = 0$ e $p = q = 1$.

[punteggio 6]

Nel dominio $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aperto e connesso (non semplicemente connesso), la funzione f ammette primitiva se e solo se risulta nullo l'integrale di f lungo una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti contenuta in D. Poiché f è analitica in D, questa condizione è equivalente all'annullarsi dell'integrale di f lungo una curva chiusa semplice che contiene al suo interno il punto $z = 0$. Detta γ una di queste curve, la condizione certata è pertanto

$$\int_\gamma a\frac{\sin z}{z^{p+1}}\mathrm{d}z = \int_\gamma b\frac{\cos z}{z^{q+1}}\mathrm{d}z.$$

Usando la formula integrale di Cauchy, otteniamo

$$ap!\frac{\mathrm{d}^p \sin z}{\mathrm{d}z^p}\bigg|_{z=0} = bq!\frac{\mathrm{d}^q \cos z}{\mathrm{d}z^q}\bigg|_{z=0}.$$

Per $p = q = 0$ la condizione fornisce $b = 0$, mentre per $p = q = 1$ si ha $a = 0$.

<u>Esercizio 6</u> Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{11+\cos\theta}.$$

[punteggio 5]

Ponendo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z$ si ha $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z/\mathrm{i}z$, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ e quindi, per un generico $a > 1$, possiamo scrivere

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $\gamma(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, e $f(z) = -\mathrm{i}/(z^2+2az+1)$. La funzione f ha due poli semplici in $z_\pm = -a \pm \sqrt{a^2-1}$. Si osservi che $|z_-| > 1$ e, poiché $z_+z_- = 1$, $|z_+| < 1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino γ mentre quello in z_- è esterno, e per il teorema dei residui si conclude

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} &= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z) \\ &= 2\pi\mathrm{i} \left.\frac{-\mathrm{i}}{z-z_-}\right|_{z=z_+} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\end{aligned}$$

Per $a = 11$ si ha quindi

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{11+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{120}}.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova B4 – 26 settembre 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Dimostrare la seguente disuguaglianza numerica

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad a, b \geq 0,$$

dove p, q sono una qualsiasi coppia di numeri reali tali che $1/p + 1/q = 1$.

[punteggio 5]

Si veda testo di riferimento, pagina 45.

Esercizio 2 Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se F è un funzionale lineare continuo nello spazio vettoriale normato indicato.

a) $F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \qquad (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$

b) $F(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{4+|x|^{1/3}} \mathrm{d}x \qquad (C_{5/4}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{5/4})$

c) $F(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \qquad (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

d) $F(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+1)}{5+(x-3)^2} \mathrm{d}x \qquad (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

e) $F(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\log(7+x^8)} \mathrm{d}x \qquad (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

f) $F(f) = \displaystyle\int_3^8 (f(x)+1) \mathrm{d}x \qquad (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

[punteggio 6]

a) No. Per $x = (1, 1, 1, \dots)$ risulta $F(x) = \infty$.
b) Si. La linearità è ovvia, la limitatezza si dimostra usando la disuguaglianza di Hölder

$$|F(f)| \le \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)}{4+|x|^{1/3}} \right| \mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{5/4} \right)^{4/5} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{4+|x|^{1/3}} \right|^5 \mathrm{d}x \right)^{1/5}$$

c) Si. La linearità è ovvia e la limitatezza pure

$$|F(f)| \le \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \mathrm{e}^{-x^2} \right| \mathrm{d}x \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$$

d) Si. Stesso ragionamento del caso c).
e) No. Per $f(x) = 1/(1+|x|^{1/2})$ l'integrale diverge.
f) No. Per $f(x) = 0$ risulta $F(f) \neq 0$.

Esercizio 3 Determinare la derivata della distribuzione regolare φ_g associata alla funzione

$$g(x) = \sin(x)e^{|x|}\chi_{[-5,2]}(x)\chi_{[-2,7]}(x),$$

dove $\chi_{[a,b]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$, cioè $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ se $x \in [a,b]$ e $\chi_{[a,b]}(x) = 0$ altrove.

[punteggio 5]

Si osservi che $\chi_{[-5,2]}(x)\chi_{[-2,7]}(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$. La funzione g è continua a tratti (questo assicura che φ_g è una distribuzione) con discontinuità nei punti $u_1 = -2$ e $u_2 = 2$ di valore

$$\begin{aligned} h_1 &= g(u_1^+) - g(u_1^-) = \sin(-2)e^{|-2|} = -\sin(2)e^2 \\ h_2 &= g(u_2^+) - g(u_2^-) = -\sin(2)e^{|2|} = -\sin(2)e^2 \end{aligned}$$

La derivata di g esiste continua a tratti (questo assicura che $\varphi_{g'}$ è una distribuzione) e vale

$$\begin{aligned} g'(x) &= \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \cos(x)e^{-x} - \sin(x)e^{-x} & -2 < x < 0 \\ \cos(x)e^{x} + \sin(x)e^{x} & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases} \\ &= (\cos(x) + \sin(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-2,2]}(x) \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\varphi_g' = \varphi_{g'} - e^2\sin(2)\delta_{-2} - e^2\sin(2)\delta_2$$

Esercizio 4 Calcolare la norma dell'operatore lineare $\mathcal{F}$ dallo spazio delle funzioni $(L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ allo spazio delle funzioni $(C_0(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$ definito da

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

[punteggio 5]

$\forall f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(f)\|_u &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \\ &\le \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)e^{-i\lambda x}\right| dx \\ &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f\|_1 = \|f\|_1\end{aligned}$$

e pertanto

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{f\in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ f\neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} \le 1.$$

D'altro canto, con la scelta

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\alpha x} & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

si ha

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{-1}^{1} e^{i(\alpha-\lambda)x}dx = 2\,\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\lambda-\alpha}$$

e quindi

$$\frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} = \frac{\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} 2\left|\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\lambda-\alpha}\right|}{\int_{-1}^{1}|e^{i\alpha x}|\,dx} = \frac{2}{2} = 1.$$

Si conclude che $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Esercizio 5 Sia θ_+ l'operatore di traslazione a destra che agisce nello spazio di Banach complesso $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$

$$\theta_+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di θ_+. Si ricordi che $\|\theta_+\| = 1$.

[punteggio 6]

Per determinare lo spettro puntuale di θ_+ studiamo l'iniettività dell'operatore $zI - \theta_+$ al variare di $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\text{Ker}(zI - \theta_+)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI - \theta_+)x = 0$ è soddisfatta per $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ solo da $x = 0$ (operatore $zI - \theta_+$ iniettivo). L'equazione agli autovalori $(zI - \theta_+)x = 0$ implica

$$\begin{aligned} &zx_1 = 0, \\ &zx_k = x_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Se $z = 0$ le equazioni per $k \geq 2$ forniscono l'unica soluzione $x = 0$. Se $z \neq 0$, dalla prima equazione si ha $x_1 = 0$, che usata nell'equazione per $k = 2$ fornisce $x_2 = 0$, che usata nell'equazione per $k = 3$ fornisce $x_3 = 0$, e così via. Pertanto anche per $z \neq 0$ l'unica soluzione possibile è $x = 0$. In conclusione l'operatore $zI - \theta_+$ è iniettivo $\forall z \in \mathbb{C}$ e $\sigma_p(\theta_+) = \emptyset$.

Per determinare lo spettro continuo di θ_+ studiamo la suriettività di $zI - \theta_+$ al variare di $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(\theta_+) = \mathbb{C}$. Si tratta di determinare se $\text{Ran}(zI - \theta_+) = \{y \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ y = (zI - \theta_+)x, \ x \in \ell_2(\mathbb{C})\}$ coincide con tutto $\ell_2(\mathbb{C})$ (operatore $zI - \theta_+$ suriettivo) oppure ne è un sottoinsieme proprio. L'equazione vettoriale $(zI - \theta_+)x = y$ equivale al sistema di infinite equazioni scalari

$$\begin{aligned} &zx_1 - 0 = y_1 \\ &zx_k - x_{k-1} = y_k, \qquad k = 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Se $z = 0$, deve essere $y_1 = 0$ quindi $zI - \theta_+$ è certamente non suriettivo. Se $z \neq 0$, deve aversi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1}{z}, \\ x_2 &= \frac{x_1 + y_2}{z} = \frac{y_1}{z^2} + \frac{y_2}{z}, \\ x_3 &= \frac{x_2 + y_3}{z} = \frac{y_1}{z^3} + \frac{y_2}{z^2} + \frac{y_3}{z}, \\ &\vdots \\ x_k &= \frac{x_{k-1} + y_k}{z} = \frac{y_1}{z^k} + \frac{y_2}{z^{k-1}} + \dots \frac{y_{k-1}}{z^2} + \frac{y_k}{z}. \end{aligned}$$

Per $0 < |z| \leq 1$, al vettore $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$ corrisponde la soluzione x con componenti $x_k = z^{-k}$ che non appartiene a $\ell_2(\mathbb{C})$. Pertanto anche in questo caso l'operatore $zI - \theta_+$ è non suriettivo. Infine, considerando che $\sigma(\theta_+) \subset \overline{B}(0, \|\theta_+\|)$ e $\|\theta_+\| = 1$, concludiamo che $\sigma_c(\theta_+) = \overline{B}(0, 1)$.

<u>Esercizio 6</u> Sapendo che $\mathcal{F}[g(x)](\lambda) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}$, calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ tale che $f''(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}g(x/2)$.

[punteggio 6]

Prendendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri della relazione $f''(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}g(x/2)$, otteniamo

$$\mathcal{F}[f''(x)](\lambda) = (\mathrm{i}\lambda)^2\mathcal{F}[f(x)](\lambda)$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}g(x/2)](\lambda) = \mathcal{F}[g(x/2)](\lambda-3) = 2\mathcal{F}[g(x)](2(\lambda-3)) = 2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-(2(\lambda-3))^2/4},$$

avendo utilizzato le proprietà generali della trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(x)](\lambda/a), \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \quad f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

$$\mathcal{F}[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}](\lambda) = \mathcal{F}[f(x)](\lambda - a), \qquad a \in \mathbb{R}, \quad f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)](\lambda) = (\mathrm{i}\lambda)^k\mathcal{F}[f(x)](\lambda), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad f \in C^{k-1}(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

Si conclude che

$$\mathcal{F}[f(x)](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-(\lambda-3)^2}.$$