MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2014/2015 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 27 gennaio 2016

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare il valore di $\cos(3\arctan(3))$.

[punteggio 5]

Posto $\theta = \arctan(3)$, dalla formula di de Moivre si ha

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)$$

e quindi

$$\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3\right) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta.$$

Usando $\cos^2\theta = 1 - \tan^2\theta\cos^2\theta$, per $\tan\theta = 3$ si ha

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{10}, \qquad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{9}{10}.$$

Risulta quindi

$$\cos(3\arctan(3)) = \cos\theta\left(\frac{1}{10} - 3\frac{9}{10}\right) = -\frac{13}{5}\cos\theta.$$

Poiché $\theta = \arctan(3)$ ha due possibili soluzioni, la prima nell'intervallo $0 < \theta < \pi/2$ a cui corrisponde $\cos\theta > 0$ e la seconda in $-\pi < \theta < -\pi/2$ a cui corrisponde $\cos\theta < 0$, possiamo concludere

$$\cos(3\arctan(3)) = \mp\frac{13}{5\sqrt{10}}.$$

Esercizio 2 Dimostrare che la palla aperta $B(x,r)$ nello spazio metrico (S,d) è un aperto in S.

[punteggio 5]

Sia $B(x,r)$ con $x \in S$ e $r > 0$ una palla aperta in S. Sia y un generico punto di $B(x,r)$. Per definizione risulta $d(y,x) < r$. Mostriamo che è possibile costruire una palla aperta $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$. Posto $\varepsilon = r - d(y,x) > 0$, $\forall z \in B(y,\varepsilon)$, si ha $d(z,y) < \varepsilon$ da cui segue, per la proprietà triangolare, $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon + (r - \varepsilon) = r$, ovvero $z \in B(x,r)$. Dall'arbitrarietà di z si conclude che $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$.

Esercizio 3 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-\pi)^{-n}z^{1+n+n^2+n^3}, \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{\pi}(\mathrm{i}\pi)^n z^n.$$

[punteggio 6]

---

a) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-\pi)^{-k} & n = 1+k+k^2+k^3, \quad k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geq m} \left\{ \pi^{-k/(1+k+k^2+k^3)} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

cioè $R = 1$.

b) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^{\pi}(\mathrm{i}\pi)^n$ e si ha

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^{\pi}\pi^n}{(n+1)^{\pi}\pi^{n+1}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\pi} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}.$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/\pi$.

<u>Esercizio 4</u> Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di

$$\arccos z = -\mathrm{i}\log\left(z + \mathrm{i}\sqrt{1-z^2}\right).$$

[punteggio 5]

Il ramo principale di tale funzione è definito prendendo i rami principali della radice e del logaritmo. Il ramo principale di $\sqrt{1-z^2} = \exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$ è una funzione analitica ovunque in $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti z tali che $1-z^2 = -u$ con $u \in [0,\infty)$. Tali punti

$$z(u) = \pm\sqrt{1+u}, \qquad u \in [0,\infty),$$

rappresentano le semirette reali $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$. Il ramo principale di $\log(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2})$ risulta non analitico nei punti che soddisfano $z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2} = -t$ con $t \in [0,\infty)$. La soluzione di questa equazione ottenuta quadrando l'espressione equivalente $\mathrm{i}\sqrt{1-z^2} = -(t+z)$ fornisce

$$z(t) = -\frac{1+t^2}{2t}, \qquad t \in (0,\infty),$$

che rappresenta la semiretta reale $(-\infty,-1]$ percorsa due volte, una volta per $t \in (0,1]$ e una volta per $t \in [1,\infty)$. Si osservi che solo i punti $z(t)$ ottenuti per $t \in [1,\infty)$ effettivamente soddisfano l'equazione di partenza in cui per la radice si considera il ramo principale. Infatti $\mathrm{i}\sqrt{1-z(t)^2} = \mathrm{i}\sqrt{-(t^2-1)^2/(4t^2)} = \mathrm{i}^2\sqrt{(t^2-1)^2/(4t^2)} \le 0$ $\forall t \in (0,\infty)$, mentre $-(t+z(t)) = (1-t^2)/2t \le 0$ solo per $t \in [1,\infty)$. In conclusione, il dominio di analiticità di $\arccos z$ è tutto il piano complesso ad eccezione delle semirette reali $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$.

Esercizio 5 Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z = 0$ la funzione

$$f(z) = \frac{3+z}{z^5 + \pi z^3}.$$

e calcolarne il corrispondente residuo.

[punteggio 6]

Possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{3+z}{\pi z^3} \frac{1}{1 + z^2/\pi}.$$

Per $0 < |z| < \pi^2$, posto $w = z^2/\pi$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \qquad |w| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{3+z}{z^5 + \pi z^3} &= \left(\frac{3}{\pi z^3} + \frac{1}{\pi z^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^2}{\pi} \right)^n \\ &= \frac{3}{\pi z^3} + \frac{1}{\pi z^2} - \frac{3}{\pi^2 z} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{3z}{\pi^3} + \frac{z^2}{\pi^3} + \dots \end{aligned}$$

Risulta quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{3}{\pi^2}.$$

Esercizio 6 Calcolare, utilizzando il teorema dei residui, l'integrale reale

$$\int_0^{2\pi} (1+\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta.$$

[punteggio 6]

Posto $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e detto γ il cammino chiuso $|z| = 1$ percorso in verso antiorario, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (1+\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta &= \int_\gamma \left(1 + \left(\frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)^3\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\ &= \int_\gamma \frac{z^6 - 3z^4 - \mathrm{i}8z^3 + 3z^2 - 1}{8z^4}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

La funzione integranda è analitica su e dentro γ ad eccezione del polo di ordine 4 in $z = 0$. Posto

$$h(z) = \frac{1}{8}(z^6 - 3z^4 - \mathrm{i}8z^3 + 3z^2 - 1),$$

si ha

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{h(z)}{z^4} = \frac{h^{(3)}(0)}{3!} = \frac{-6\mathrm{i}}{6} = -\mathrm{i}.$$

Per il teorema dei residui concludiamo

$$\int_0^{2\pi} (1+\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\ \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{h(z)}{z^4} = 2\pi.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2014/2015 – Prof. C. Presilla

Prova B4 – 27 gennaio 2016

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Dimostrare che ℓ_f non è denso in $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

[punteggio 5]

Y è denso in X se $\overline{Y} = X$ ovvero se $\forall x \in X$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in Y$ tale che $d(x, y) < \varepsilon$.
In questo caso $X = \ell_\infty$ con $d(x, x') = \|x - x'\|_\infty$ mentre $Y = \ell_f$.
Si consideri il vettore $x = (1, 1, 1, ...)$ di ℓ_∞. Se y è un generico vettore di ℓ_f per definizione $\exists n$ tale che $y_k = 0$ $\forall k > n$. Quindi

$$\|x - y\|_\infty = \sup_k |x_k - y_k| \geq \sup_{k>n} |x_k - y_k| = 1.$$

Questo dimostra che

$$\|x - y\|_\infty \geq 1 \qquad \forall y \in \ell_f.$$

Di conseguenza x è un elemento di ℓ_∞ che non appartiene alla chiusura ℓ_f. Quindi ℓ_f non è denso in ℓ_∞.

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale $P[0,\infty)$ con prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ sia $W = \mathrm{span}\{x,x^2\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^3$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$. Si ricordi che $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{x, x^2\}$

$$u_1(x) = x$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = 2$$

$$u_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1(x) = x^2 - 3x$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^\infty \left(x^2 - 3x\right)^2 e^{-x}dx = 24 + 18 - 36 = 6.$$

Usando il proiettore π_W si ha

$$w = \pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k$$

ovvero

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\langle x^3, x\rangle}{2}x + \frac{\langle x^3, x^2 - 3x\rangle}{6}(x^2 - 3x) \\ &= \frac{4!}{2}x + \frac{5! - 3\times 4!}{6}(x^2 - 3x) \\ &= 12x + 8(x^2 - 3x) \\ &= -12x + 8x^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x^3 - 8x^2 + 12x.$$

Esercizio 3 Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio spazio di Hilbert complesso e $T : V \mapsto V$ un operatore lineare. Dimostrare che, se $\langle u, Tu\rangle = 0\ \forall u \in V$, allora $T = 0$.

[punteggio 6]

Siano u, v due qualsiasi vettori di V. Si ha

$$\begin{aligned} 0 = &\ \langle u+v, T(u+v)\rangle \\ = &\ \langle u, Tu\rangle + \langle v, Tv\rangle + \langle u, Tv\rangle + \langle v, Tu\rangle \\ = &\ \langle u, Tv\rangle + \langle v, Tu\rangle \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} 0 = &\ \mathrm{i}\langle u+\mathrm{i}v, T(u+\mathrm{i}v)\rangle \\ = &\ \mathrm{i}\langle u, Tu\rangle + \mathrm{i}\langle v, Tv\rangle + \langle u, Tv\rangle - \langle v, Tu\rangle \\ = &\ \langle u, Tv\rangle - \langle v, Tu\rangle. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro si ha dunque $\langle u, Tv\rangle = 0\ \forall u, v \in V$. Sia $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione di vettori $w_n \in V$ tale che $w_n \xrightarrow{n\to\infty} Tv$. Tale successione esiste in quanto V è completo. Per la continuità del prodotto scalare, si ha

$$\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle w_n, Tv\rangle = 0, \qquad \forall v \in V,$$

dunque $Tv = 0\ \forall v \in V$, cioè $T = 0$.

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/2}\delta(x^5 - x)\mathrm{d}x,$$

dove $\delta(x^5 - x)$ è la distribuzione δ di Dirac composta $\delta_0[x^5 - x]$.

[punteggio 5]

Si ponga $b(x) = x^5 - x$. La funzione $b(x)$ si annulla nei punti $x = 0$ e $x = \pm 1$. Inoltre risulta $b'(x) = 5x^4 - 1$ e quindi $|b'(0)| = 1$ e $|b'(\pm 1)| = 4$. Pertanto

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/2}\delta(x^5 - x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/2}\left(\frac{1}{|b'(0)|}\delta(x) + \frac{1}{|b'(1)|}\delta(x-1) + \frac{1}{|b'(-1)|}\delta(x+1)\right)\mathrm{d}x \\
&\quad = 1 + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\right) \\
&\quad = 1 + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} \\
&\quad = 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (x_2, x_3 + x_1, x_4 + x_2, x_5 + x_3, x_6 + x_4, \dots).$$

Dimostrare che T è continuo e determinare T^*. Mostrare infine che gli autovalori di T sono reali di modulo non superiore a 2.

[punteggio 6]

Per dimostrare che T è continuo basta mostrare che è limitato. Sia x una generica successione di $\ell_2(\mathbb{C})$, si ha

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &= |x_2|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} |x_{k+1} + x_{k-1}|^2 \\ &\le |x_2|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (|x_{k+1}| + |x_{k-1}|)^2 \\ &\le 4\|x\|_2^2,\end{aligned}$$

che implica $\|T\| \le 2$.
L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\langle T^*x, y\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (T^*x)_k \overline{y_k} \\ \langle x, Ty\rangle &= x_1\overline{y_2} + x_2(\overline{y_3} + \overline{y_1}) + x_3(\overline{y_4} + \overline{y_2}) + x_4(\overline{y_5} + \overline{y_3}) + \dots \\ &= x_2\overline{y_1} + (x_1 + x_3)\overline{y_2} + (x_2 + x_4)\overline{y_3} + (x_3 + x_5)\overline{y_4} + \dots\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (x_2, x_3 + x_1, x_4 + x_2, x_5 + x_3, x_6 + x_4, \dots).$$

Poiché $T^* = T$, gli autovalori di T sono reali. Infatti detto $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di T con autovettore x, $Tx = \lambda x$, si ha

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle T^*x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle,$$

da cui segue

$$\lambda - \overline{\lambda} = 2\,\mathrm{Im}\,\lambda = 0,$$

cioè $\lambda = a$ con $a \in \mathbb{R}$. Infine, ricordando che $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$ e usando $\|T\| \le 2$, si ricava $|\lambda| \le 2$.

<u>Esercizio 6</u> Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, b) $g(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

[punteggio 6]

---

a) Per $\lambda > 0$ risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{e^{-\lambda}}{2i} = \pi e^{-\lambda},$$

mentre per $\lambda < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{i\lambda x} dx = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2} = -2\pi i \frac{e^{\lambda}}{-2i} = \pi e^{\lambda}.$$

Pertanto

$$\mathcal{F}(f(x))(\lambda) = \pi e^{-|\lambda|}.$$

b) Osservando che

$$g(x) = -\frac{x}{2} \frac{d}{dx} f(x),$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g(x))(\lambda) &= -\frac{1}{2}\mathcal{F}(xf'(x))(\lambda) \\
&= -\frac{1}{2} i \frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(f'(x))(\lambda) \\
&= -\frac{1}{2} i \frac{d}{d\lambda} i\lambda \mathcal{F}(f(x))(\lambda) \\
&= -\frac{1}{2} i \frac{d}{d\lambda} i\lambda\pi e^{-|\lambda|} \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|}(1 - |\lambda|).
\end{aligned}$$