MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2014/2015 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 27 aprile 2015

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare il valore principale delle seguenti quantità:

a) $\ln\left|(1-\mathrm{i})^{\sqrt{2}+\mathrm{i}\pi}\right|$, b) $\operatorname{Im}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right)$.

[punteggio 6]

---

a) Usando $z^w = \exp(w \operatorname{Log} z)$ e $\operatorname{Log} z = \ln|z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z$ con $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, si ha

$$
\begin{aligned}
(1-\mathrm{i})^{\sqrt{2}+\mathrm{i}\pi} &= \exp\left[\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\pi\right)\left(\ln\sqrt{2}-\imath\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \exp\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2+\frac{\pi^2}{4}\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)\right],
\end{aligned}
$$

pertanto

$$
\ln\left|(1-\mathrm{i})^{\sqrt{2}+\mathrm{i}\pi}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2+\frac{\pi^2}{4}.
$$

b) Usando $\arctan z = -(\mathrm{i}/2)\log((\mathrm{i}-z)/(\mathrm{i}+z))$, si ha

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right) &= \operatorname{Im}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\log\left(\frac{\mathrm{i}/2}{3\mathrm{i}/2}\right)\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\log(3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln 3.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2 Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

convergente a $f(z) = \sin(z)/(z^3 + 1)$ per $|z - z_0| < R$ con $z_0 = 2$. Determinare il raggio di convergenza R.

[punteggio 5]

La funzione $f(z)$ è analitica in $\mathbb{C}$ ad eccezione degli zeri di $z^3 + 1 = 0$, cioè dei punti

$$w_k = \sqrt[3]{-1} = \left(1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^{1/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi + 2k\pi)/3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

All'interno del massimo cerchio, centrato in z_0, in cui $f(z)$ risulta analitica, tale funzione ha uno sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 2$ che coincide con la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Pertanto il raggio di convergenza R della serie data risulta

$$\begin{aligned} R &= \min_{k=0,1,3} |z_0 - w_k| \\ &= \left|2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right| \\ &= \sqrt{5 - 4\cos\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Dimostrare che se f è continua in z_0 e $f(z_0) \neq 0$ allora $f(z) \neq 0$ in tutto un intorno di z_0.

[punteggio 5]

Si veda il Teorema 3.28 a pagina 35 del testo di riferimento.

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f(z) = (3z^2 - \overline{z}^2)\overline{z}/2$. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità di f.

[punteggio 6]

In quanto composizione di funzioni continue in tutto $\mathbb{C}$, f è continua in tutto $\mathbb{C}$. Per studiare la derivabilità, si osservi che, posto $z = x + \mathrm{i}y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^3 + 3xy^2 + \mathrm{i}(y^3 + 3x^2y),$$

pertanto $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = x^3 + 3xy^2$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = y^3 + 3x^2y$. Le funzioni u e v sono derivabili in tutto $\mathbb{R}^2$ con derivate

$$\begin{aligned} &u_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2, \qquad u_y(x, y) = 6xy, \\ &v_x(x, y) = 6xy, \qquad v_y(x, y) = 3y^2 + 3x^2, \end{aligned}$$

continue in tutto $\mathbb{R}^2$. Le equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, sono quindi

$$\begin{aligned} &3x^2 + 3y^2 = 3x^2 + 3y^2, \\ &6xy = -6xy. \end{aligned}$$

La prima equazione è sempre soddisfatta, la seconda solo se $x = 0$ oppure $y = 0$. Segue che f è derivabile solo nei punti degli assi coordinati. In nessuno di tali punti però la f è analitica. Infatti $\forall\varepsilon > 0$ la palla $B(z, \varepsilon)$, con z reale o immaginario puro, contiene punti w tali che $\operatorname{Re} w \neq 0$ e $\operatorname{Im} w \neq 0$ in cui la f è non derivabile.

Esercizio 5 Si determini il valore dell'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z$$

dove γ è la circonferenza orientata positivamente di centro 0 e raggio 1/4.

[punteggio 6]

La funzione $f(z) = 1/\sin(z^{-1})$ è analitica ovunque ad eccezione delle singolarità isolate nei punti $\pm z_n = (n\pi)^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, e della singolarità non isolata in $z = 0$. Dunque la funzione $1/\sin(z^{-1})$ è analitica sul cammino chiuso γ e al suo esterno ad eccezione dei punti $\pm z_1$. Per il Teorema del residuo all'infinito l'integrale di f lungo una curva η chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente e che contiene al suo interno tutte le singolarità di f vale

$$\int_\eta f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z)}.$$

Tale residuo può essere calcolato considerando che per $0 < |z| < \infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots} \\
&= \frac{1}{z^3}\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)^2 + \ldots\right] \\
&= z^{-3} + \frac{1}{3!}z^{-1} + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right)z + \ldots,
\end{aligned}$$

pertanto

$$\int_\eta f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{3!} = \frac{\pi}{3}\mathrm{i}.$$

Per il principio di deformazione dei cammini e il teorema dei residui, risulta

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\eta f(z)\mathrm{d}z - 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-z_1} f(z)\right).$$

Poiché $\sin(z^{-1})$ ha zeri semplici nei punti $\pm z_1$, si ha

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm z_1} f(z) = -\frac{z_1^2}{\cos(z_1^{-1})} = \frac{1}{\pi^2}.$$

In conclusione

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{\pi}\right)\mathrm{i}.$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}.$$

[punteggio 5]

Ponendo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z$ si ha $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z/\mathrm{i}z$, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ e

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $\gamma(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e

$$f(z) = \frac{-2\mathrm{i}z}{(z^2+2az+1)^2}.$$

La funzione f ha due poli doppi in $z_\pm = -a \pm \sqrt{a^2-1}$. Si osservi che $|z_-| > 1$ e, poiché $z_+z_- = 1$, $|z_+| < 1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino γ mentre quello in z_- è esterno. Il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z)\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{-2\mathrm{i}z}{(z-z_-)^2}\right|_{z=z_+}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\,\frac{2\mathrm{i}(z_++z_-)}{(z_+-z_-)^3}\\ &= \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Nel caso particolare $a = \sqrt{2}$ si ha

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2} = \pi\sqrt{2}.$$