MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2016/2017 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 27 aprile 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Calcolare la somma

$$S = \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{3\pi}{9} + \sin\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9}.$$

Suggerimento: si consideri la formula di de Moivre

[punteggio 6]

Si ponga

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{9}} = \cos\frac{\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{9},$$

utilizzando la formula di de Moivre $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$, risulta

$$S = \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{3} z^{2k+1} = \operatorname{Im}\left(z\sum_{k=0}^{3}(z^2)^k\right) = \operatorname{Im}\left(z\frac{1-(z^2)^4}{1-z^2}\right) = \operatorname{Im}\frac{z-z^9}{1-z^2}.$$

Osservando che $z^9 = -1$, si ottiene

$$S = \operatorname{Im}\frac{1}{1-z} = \operatorname{Im}\frac{1-\overline{z}}{(1-z)(1-\overline{z})} = \frac{\operatorname{Im}(1-\overline{z})}{1+|z|^2-2\operatorname{Re}z} = \frac{\operatorname{Im}z}{2(1-\operatorname{Re}z)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{1-\cos\frac{\pi}{9}}.$$

<u>Esercizio 2</u> Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Dimostrare che se f è analitica in D e $|f|$ costante in D, allora f è costante in D.

[punteggio 5]

Si veda il Teorema 5.20 a pagina 60 del testo di riferimento.

Esercizio 3 Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

convergente a $f(z) = \tan(z) \log(z - \pi + \mathrm{i})$ per $|z - z_0| < R$ con $z_0 = 2 + \mathrm{i}$. Determinare il raggio di convergenza R di tale serie. Si assuma il ramo principale per le funzioni polidrome.

[punteggio 5]

La funzione $f(z)$ è analitica in $\mathbb{C}$ ad eccezione della linea di diramazione $w(t) = -\mathrm{i} + (\pi - t)$, con $t \in [0, \infty)$, e delle singolarità isolate nei punti

$$w_k = (2k+1)\pi/2, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Il raggio di convergenza R è il raggio del massimo cerchio centrato in $z_0 = 2 + \mathrm{i}$ all'interno del quale $f(z)$ risulta analitica. Poiché

$$\min_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots} |z_0 - w_k| = |z_0 - w_1| = \sqrt{(2 - \pi/2)^2 + 1},$$

$$\min_{t \in [0,\infty)} |z_0 - w(t)| = |z_0 - w(\pi - 2)| = 2,$$

risulta $R = \sqrt{(2 - \pi/2)^2 + 1}$.

Esercizio 4 Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$, con $D = \{z \in : \; 0 < |z| < \pi/2\}$, definita da

$$f(z) = \frac{\tan z}{z^2}.$$

Mostrare che f non ha primitiva in D.

[punteggio 5]

Nel dominio D, aperto e connesso, f, analitica in D, ha primitiva se e solo se $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ per ogni cammino γ chiuso, regolare a tratti, contenuto in D. Si consideri la circonferenza γ centrata nell'origine, di raggio 1, orientata positivamente. Per la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione $\tan z$, analitica su e dentro γ, risulta

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\tan z}{(z-0)^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan z\bigg|_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\cos^2 0} \neq 0.$$

Pertanto f non ha primitiva in D.

Esercizio 5 Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z,$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine, di raggio $1/5$, percorsa in verso antiorario.

[punteggio 6]

La funzione $1/\sin(z^{-1})$ è analitica ovunque ad eccezione dei poli semplici nei punti $z_n = (n\pi)^{-1}$, $n = \pm1, \pm2, \dots$, e della singolarità non isolata in $z = 0$. Detta γ_1 la circonferenza centrata nell'origine, di raggio 1, percorsa in verso antiorario, la funzione $1/\sin(z^{-1})$ risulta analitica su γ_1 e al suo esterno, e per il teorema del residuo all'infinito si ha

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z)}.$$

Tale residuo può essere calcolato considerando che per $0 < |z| < \infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots} \\
&= \frac{1}{z^3}\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= z^{-3} + \frac{1}{3!}z^{-1} + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right)z + \dots.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{3!} = \frac{\pi}{3}\mathrm{i}.$$

Per il principio di deformazione dei cammini, risulta

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z = \int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_+} \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_-} \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z,$$

dove $\gamma_\pm$ sono circonferenze, centrate nei punti $\pm\pi^{-1}$, orientate positivamente e di raggio minore di $\min(1/\pi - 1/5, 1 - 1/\pi)$. Poiché

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm\pi^{-1}} \frac{1}{\sin(z^{-1})} = \left.\frac{1}{\sin'(z^{-1})}\right|_{z=\pm\pi^{-1}} = \frac{1}{\pi^2},$$

concludiamo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z^{-1})}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\pi^2} - 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\pi^2} = \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{\pi}\right).$$

Esercizio 6 Dimostrare che il seguente integrale improprio è convergente e calcolarne il corrispondente valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(3x)+3}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

[punteggio 6]

Si consideri la funzione complessa $f(z) = (z\mathrm{e}^{\mathrm{i}3z} + 3\mathrm{i})/(z^2+1)$ che ha poli semplici in $z = \pm\mathrm{i}$ e la si integri lungo il perimetro γ, orientato positivamente, del quadrato di vertici $-R_1$, R_2, $R_2 + \mathrm{i}(R_1+R_2)$, $-R_1 + \mathrm{i}(R_1+R_2)$, con $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ e $R_1 + R_2 > 1$. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z)\\ &= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-3}+3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\\ &= \mathrm{i}\pi(3+\mathrm{e}^{-3}).\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4}\int_{\lambda_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $\lambda_1(x) = x$, $-R_1 \le x \le R_2$, $\lambda_2(y) = R_2 + \mathrm{i}y$, $0 \le y \le R_1 + R_2$, $\lambda_3(x) = x + \mathrm{i}(R_1+R_2)$, $R_2 \ge x \ge -R_1$, e $\lambda_4(y) = -R_1 + \mathrm{i}y$, $R_1 + R_2 \ge y \ge 0$. Gli integrali lungo i cammini che compongono γ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R_1}^{R_2}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}+3\mathrm{i}}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{R_1+R_2}\frac{(R_2+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}3R_2-3y}+3\mathrm{i}}{(R_2+\mathrm{i}y)^2+1}\mathrm{i}\mathrm{d}y \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R_2}^{-R_1}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x-3(R_1+R_2)}+3\mathrm{i}}{(x+\mathrm{i}(R_1+R_2))^2+1}\mathrm{d}x \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_4} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R_1+R_2}^{0}\frac{(-R_1+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3R_1-3y}+3\mathrm{i}}{(-R_1+\mathrm{i}y)^2+1}\mathrm{i}\mathrm{d}y \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0.$$

Pertanto esiste il limite

$$\lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_{-R_1}^{R_2}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}+3\mathrm{i}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}+3\mathrm{i}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi(3+\mathrm{e}^{-3}).$$

Prendendo la parte immaginaria di questa espressione, si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(3x)+3}{x^2+1}\mathrm{d}x = \pi(3+\mathrm{e}^{-3}).$$

Si noti che, prendendo la parte reale della stessa espressione, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(3x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 0,$$

in accordo con il fatto che la funzione integranda è dispari.