MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova Finale 28 febbraio 2011 - ANALISI COMPLESSA

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin z = \cos z$$

e dire quante di queste cadono all'interno della circonferenza $|z| = 3$.

[punteggio 5]

L'equazione è equivalente a

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

ovvero

$$e^{2iz} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{i\pi/2}$$

Le soluzioni sono i numeri reali (soluzioni dell'equazione reale $\tan x = 1$)

$$z = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Di queste, solo due, quelle ottenute per $k = 0$ e $k = -1$, cadono all'interno della circonferenza $|z| = 3$.

Esercizio 2 Sviluppare $\arctan z$ in serie di Taylor con centro in $z_0 = 0$.

[punteggio 6]

Per la derivata della funzione proposta si ha

$$\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

da cui integrando membro a membro lungo un qualsiasi cammino da 0 a z

$$\begin{aligned}
\arctan z &= \int_0^z \frac{d\arctan w}{dw}dw \\
&= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^{2n} dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z (-1)^n w^{2n} dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

[punteggio 5]

Se f è intera e limitata in $\mathbb{C}$, allora f è costante in $\mathbb{C}$. Per la dimostrazione vedi note.

Esercizio 4 Trovare, in tutti i suoi punti singolari isolati, i residui della funzione

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

[punteggio 6]

La funzione ha un unico punto singolare isolato in $z = 2$. Usando lo sviluppo notevole

$$\cos w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{2k} \qquad |w| < \infty$$

per $z \in \mathbb{C}$ tale che $|1/(z-2)| < \infty$, cioé nella regione anulare $0 < |z-2| < \infty$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= ((z-2)+2)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(z-2)^{2k}} \\ &= \left((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(z-2)^{2k}} \end{aligned}$$

Da questa espressione risulta che la singolarità è essenziale e

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{(-1)^2}{4!} + 12 \frac{(-1)^1}{2!} = \frac{1}{24} - 6 = -\frac{143}{24}$$

Esercizio 5 Trovare la parte singolare della funzione

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z\,\log(1+z^2)}\,.$$

[punteggio 5]

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\,\frac{1+2z+\frac{1}{2}4z^2+\dots}{z^2-\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{3}z^6+\dots} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1+2z+\frac{1}{2}4z^2+\dots\right)\frac{1}{1-(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^4+\dots)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1+2z+\frac{1}{2}4z^2+\dots\right)\left[1+(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^4+\dots)+\dots\right] \\
&= \frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{5}{2z}+O(1)
\end{aligned}$$

Esercizio 6 Determinare il valore del seguente integrale reale (il risultato deve essere espresso in termini di quantità palesemente reali).

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+2\sqrt{3}x+4}dx$$

[punteggio 6]

Si ponga $f(z) = z^{\frac{2}{3}}/(z^2+2\sqrt{3}z+4) = e^{\frac{2}{3}\log z}/(z^2++2\sqrt{3}z+4)$, assumendo per il logaritmo quel ramo il cui asse di diramazione coincide con il semiasse reale positivo

$$\log z = \ln|z| + i\arg z, \qquad |z|>0 \qquad 0<\arg z\le 2\pi.$$

La f è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale positivo e dei due poli semplici in $z=-\sqrt{3}\pm i$ dove ha residui

$$\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{3}+i} f(z) = \left.\frac{e^{\frac{2}{3}\log z}}{z+\sqrt{3}+i}\right|_{z=-\sqrt{3}+i} = \frac{e^{\frac{2}{3}\ln 2+i\frac{5}{9}\pi}}{2i},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{3}-i} f(z) = \left.\frac{e^{\frac{2}{3}\log z}}{z+\sqrt{3}-i}\right|_{z=-\sqrt{3}-i} = \frac{e^{\frac{2}{3}\ln 2+i\frac{7}{9}\pi}}{-2i}.$$

Si integri la f lungo il cammino chiuso orientato positivamente $\gamma=\lambda_1+\gamma_R+\lambda_2+\gamma_r$, dove $\lambda_1(x)=x+i0$, $r\le x\le R$, $\gamma_R(\theta)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$, $\lambda_2(x)=x-i0$, $R\ge x\ge r$, $\gamma_r(\theta)=re^{i\theta}$, $2\pi\ge\theta\ge 0$. Come al solito, $x\pm i0$ sta a indicare $x\pm i\varepsilon$ con ε infinitesimo positivo così che in rappresentazione polare $x+i0=xe^{i\varepsilon}$ mentre $x-i0=xe^{i(2\pi-\varepsilon)}$. Per $r<2<R$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\ dz &= \int_{\lambda_1} f(z)\ dz + \int_{\gamma_R} f(z)\ dz + \int_{\lambda_2} f(z)\ dz + \int_{\gamma_r} f(z)\ dz \\
&= 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{3}+i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{3}-i} f(z)\right] \\
&= \pi e^{\frac{2}{3}\ln 2}\left(e^{i\frac{5}{9}\pi} - e^{i\frac{7}{9}\pi}\right).
\end{aligned}$$

Per i singoli cammini di integrazione risulta

$$\int_{\lambda_1} f(z)\ dz = \int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3}(\ln x+i0)}}{(xe^{i0})^2+2\sqrt{3}(xe^{i0})+4}e^{i0}dx = \int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3}\ln x}}{x^2+2\sqrt{3}x+4}dx,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\ dz = \int_R^r \frac{e^{\frac{2}{3}(\ln x+i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2+2\sqrt{3}(xe^{i2\pi})+4}e^{i2\pi}dx = -e^{i\frac{4}{3}\pi}\int_r^R \frac{e^{\frac{2}{3}\ln x}}{x^2+2\sqrt{3}x+4}dx,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\ dz\right| \lesssim \frac{e^{\frac{2}{3}\ln R}}{R^2}\ R = \frac{R^{\frac{4}{3}}}{R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\ dz\right| \lesssim \frac{e^{\frac{2}{3}\ln r}}{1}\ r = r^{\frac{4}{3}} \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

Pertanto, nel limite $r \to 0$ e $R \to \infty$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4}\, dx &= \pi e^{\frac{2}{3}\ln 2} \frac{e^{i\frac{5}{9}\pi} - e^{i\frac{7}{9}\pi}}{1 - e^{i\frac{4}{3}\pi}} \\
&= \pi 2^{\frac{2}{3}}\ \frac{e^{i\frac{6}{9}\pi}}{e^{i\frac{2}{3}\pi}}\ \frac{e^{-i\frac{1}{9}\pi} - e^{i\frac{1}{9}\pi}}{e^{-i\frac{2}{3}\pi} - e^{i\frac{2}{3}\pi}} \\
&= \pi \sqrt[3]{4}\ \frac{\sin(\pi/9)}{\sin(2\pi/3)} \\
&= \pi 2 \sqrt[3]{4}\ \sin(\pi/9)
\end{aligned}$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova Finale 28 febbraio 2011 - ANALISI FUNZIONALE

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Nei casi seguenti, se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola una delle proprietà della norma.

1. $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|$;
2. $V = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$;
3. $V = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1}{1+|x|} dx$;
4. $V = \ell_4$ e $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3}$;
5. $V = \ell_1$ e $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right)^{1/3}$.

[punteggio 5]

1. No. Ad esempio per $x = (1, 1, 1) \neq 0$ si ha $\|x\| = 0$.
2. Sì.
3. No. Si prenda $f(x) = 1/\log(2 + |x|)$ per la quale risulta $\|f\| = \infty$.
4. No. Si prenda $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ con $x_k = k^{-1/3}$. Allora
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3} < \infty$$
cioè $x \in \ell_4$ ma
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$
5. Sì.

Esercizio 2 Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti funzioni appartengono a $C_1(\mathbb{R})$

(a) $|x|\, e^{-\alpha |x|^{1/3}}$ (b) $\dfrac{x^3 - \log(1+x^4)}{(x^2+1)^\alpha}$ (c) $\dfrac{x}{(x^2+1)(\log(1+x^2))^\alpha}$

[punteggio 6]

(a) $\alpha > 0$ (b) $\alpha > 2$ (c) mai

Per il punto (c), si osservi che f è continua in $x = 0$ per $\alpha < 0$. D'altro canto

$$\frac{x}{(x^2+1)(\log(1+x^2))^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\log(1+x^2))^{1-\alpha}$$

quindi $|f|$ è integrabile su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 1$. In conclusione, non esite un valore di α per cui $f \in C_1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,\pi]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ sia $W = \mathrm{span}\{1, \sin x\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{1, \sin x\}$:

$$u_1(x) = 1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\pi 1^2 dx = \pi$$

$$u_2(x) = \sin x - \frac{\langle \sin x, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^\pi \left(\sin x - \frac{2}{\pi}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}$$

Usando il proiettore π_W si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k = \frac{\langle x, 1\rangle}{\pi} + \frac{\langle x, (\sin x - 2/\pi)\rangle}{\pi/2 - 4/\pi}$$

Osservando che $\langle x, 1\rangle = \pi^2/2$ mentre $\langle x, \sin x\rangle = \pi$, si ricava

$$w(x) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x - \frac{\pi}{2}.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^\pi \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 0.$$

Esercizio 4 Calcolare le seguenti distribuzioni semplificando il più possibile il risultato

(a) $x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)'$ (b) $(x(\log|x|)')'$ (c) $(\cos x \operatorname{sgn} x)'''$

[punteggio 6]

1. Usando $\theta' = \delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)' &= x(-\cos x\ \theta)' \\ &= x(\sin x\ \theta - \cos x\ \theta') \\ &= x \sin x\ \theta - x\cos x\ \delta_0 \\ &= x\sin x\ \theta \end{aligned}$$

2. Usando $(\log|x|)' = P(1/x)$, si ha

$$(x(\log|x|)')' = (xP(1/x))' = (1)' = 0$$

3. Usando $(\operatorname{sgn} x)' = 2\delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} (\cos x \operatorname{sgn} x)''' &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + \cos x\ 2\delta_0)'' \\ &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0)'' \\ &= (-\cos x \operatorname{sgn} x - \sin x\ 2\delta_0 + 2\delta_0')' \\ &= (-\cos x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0')' \\ &= \sin x \operatorname{sgn} x - \cos x\ 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\ &= \sin x \operatorname{sgn} x - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\ &= \sin|x| - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \end{aligned}$$

Esercizio 5 Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = \theta(|x| - \pi/2)\theta(\pi - |x|)\,\mathrm{sgn}(x)$ e studiare la convergenza puntuale della serie così ottenuta.

[punteggio 5]

Poiché $\theta(x) = 1$ per $x \geq 1$ e $\theta(x) = 0$ per $x < 0$, si ha

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ 0 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ è dispari e pertanto

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mentre

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{k\pi} (\cos(k\pi/2) - \cos(k\pi)) \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

In conclusione

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\cos(k\pi/2) - \cos(k\pi))}{k\pi} \sin(kx)$$

Il prolungamento periodico da $(-\pi, \pi]$ a $\mathbb{R}$ di $f(x)$ è una funzione derivabile a tratti, con punti di discontinuità in $\pm\pi$ e $\pm\pi/2$. Pertanto la serie trigonometrica sopra scritta converge puntualmente a $f(x)$ per $x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ mentre per $x = \pm\pi$ e $x = \pm\pi/2$ converge rispettivamente a 0 e $\pm 1/2$.

<u>Esercizio 6</u> Sia T l'operatore lineare in $(C[-\pi,\pi];\mathbb{C},\|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = g(x)f(x) \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < -\pi/2 \\ \sin x & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di T.

[punteggio 6]

Si studi l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI-T)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI-T)f = 0$ è soddisfatta per $f \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ solo da $f = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)f = 0$ implica

$$(z - g(x))f(x) = 0 \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

- Se $z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, il fattore $z - g(x)$ è sempre non nullo per $x \in [-\pi,\pi]$ e quindi $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z \in (-1,1)$, il fattore $z - g(x)$ si annulla solo in $x_z = \arcsin z$. Pertanto $f(x) = 0$ $\forall x \in [-\pi, x_z) \cup (x_z, \pi]$ ma dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z = \pm 1$, l'equazione $(zI - T)f = 0$ è soddisfatta per tutte quelle funzioni f continue in $[-\pi,\pi]$ e non nulle solo in $(\pi/2,\pi]$ (se $z = 1$) o solo in $[-\pi,-\pi/2)$ (se $z = -1$). Dunque T ha autovalori $z = \pm 1$ e a ciascuno di tali autovalori corrispondono infinite autofunzioni.

Si studi ora la suriettività di $zI - T$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ran}(zI - T)$ coincide con $(C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ ovvero se $\forall h \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ esiste $f \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ tale che $(zI - T)f = h$. Affinchè ciò accada deve essere

$$f(x) = \frac{h(x)}{z - g(x)} \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

- Se $z \in (-1,1)$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$ la f diverge in x_z e quindi risulta non continua. In tal caso $zI - T$ è non suriettivo ma, per quanto visto in precedenza, iniettivo, cioè $z \in \sigma_c(T)$.
- Se $z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, la funzione f, in quanto rapporto di funzioni continue con la funzione a denominatore mai nulla, è continua in $[-\pi,\pi]$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.

Riepilogando, $\sigma_p(T) = \{-1,1\}$, $\sigma_c(T) = (-1,1)$, $\rho(T) = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$.