MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2013/2014 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 28 aprile 2014

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare il valore di $\sin(5\arccos(1/\sqrt{3}))$.

[punteggio 5]

Posto $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$, risulta

$$e^{i5\theta} = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^5.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= \operatorname{Im}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\
&= \operatorname{Im}\big(\cos^5\theta + 5\cos^4\theta(i\sin\theta) + 10\cos^3\theta(i\sin\theta)^2 \\
&\qquad +10\cos^2\theta(i\sin\theta)^3 + 5\cos\theta(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5\big) \\
&= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta \\
&= \sin\theta\left(5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\right).
\end{aligned}$$

Sappiamo che $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$ e quindi $\sin\theta = \pm\sqrt{1-1/3}$. Possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\left(5\frac{1}{9} - 10\frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) \\
&= \mp\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{11}{9}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 Sia (S, d) uno spazio metrico. Dimostare che la funzione distanza $d : S \times S \mapsto \mathbb{R}$ è continua.

[punteggio 5]

Si veda l'esempio 3.13 del testo di riferimento.

Esercizio 3 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^3 2^n z^n, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^{n^3} z^{1+n^3}.$$

[punteggio 5]

---

a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^3 2^n$ e si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^3 2^n}{(n+1)^3 2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/2$.

b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-5)^{k^3} & n = 1+k^3, \quad k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{k:\ 1+k^3 \geq m} \left\{ 5^{k^3/(1+k^3)} \right\} = \lim_{m\to\infty} 5 = 5, \end{aligned}$$

cioè $R = 1/5$.

Esercizio 4 Determinare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}}$$

assumendo per $f(z)$ il ramo corrispondente al ramo di $\log z$ che ha come linea di diramazione il semiasse reale positivo.

[punteggio 6]

Le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono intere, pertanto i punti di non analiticità di f sono tutti e solo quelli determinati dalla radice

$$\sqrt{\cos z} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(\cos z)\right).$$

La linea di diramazione del ramo scelto di $\log(\cos z)$ è determinata dall'equazione

$$\cos z = t, \qquad 0 \leq t < \infty.$$

Per $0 \leq t \leq 1$ tale equazione ammette, come nel caso reale, la soluzione

$$z(t) = \arccos(t) + 2\pi k, \qquad t \in [0, 1], \qquad k \in \mathbb{Z},$$

che rappresenta i segmenti dell'asse reale $[-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. Per $t > 1$ l'equazione risulta equivalente a

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^2 - 2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0,$$

la cui soluzione è

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = t \pm \sqrt{t^2 - 1}.$$

Osservando che il membro di destra di quest'ultima espressione è reale positivo per ogni $t > 1$, si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= -\mathrm{i}\log\left[\left(t \pm \sqrt{t^2 - 1}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\right] \\ &= 2k\pi - \mathrm{i}\ln\left(t \pm \sqrt{t^2 - 1}\right), \qquad t \in (1, \infty), \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tali punti rappresentano gli assi immaginari passanti per $z = 2k\pi$.

Esercizio 5 Determinare la natura di tutte le singolarità isolate della funzione

$$f(z) = \frac{z^5+1}{(z^2+1)z}$$

e svilupparla in serie di Laurent con centro in $z = 0$ nella regione $|z| > 1$. Determinare infine il residuo di $f(z)$ in $z = 0$.

[punteggio 6]

La funzione $f(z)$ in quanto composizione di funzioni intere è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione degli zeri delle funzioni a denominatore. Essa quindi ha singolarità isolate nei punti $z_\pm = \pm \mathrm{i}$ e $z_0 = 0$. Poiché in un intorno di $z_\pm$ si ha $f(z) = g_\pm(z)/(z - z_\pm)$ con $g_\pm(z) = (z^5+1)/((z - z_\mp)z)$ analitica e non nulla in $z_\pm$, i punti $z_\pm$ sono poli semplici. Poiché in un intorno di z_0 si ha $f(z) = g_0(z)/(z - 0)$ con $g_0(z) = (z^5+1)/(z^2+1)$ analitica e non nulla in z_0, il punto z_0 è un polo semplice. Il residuo di f in z_0 vale

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = g_0(0) = 1.$$

Nell'anello $A(0, 1, \infty)$ la funzione f è analitica e quindi sviluppabile in serie di Laurent. Osservando che in questo anello risulta $|1/z| < 1$ e utilizzando il risultato notevole della serie geometrica si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^5+1}{z^3(1+z^{-2})} \\ &= \left(z^2 + \frac{1}{z^3}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-3} \\ &= z^2 - 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} + \dots . \end{aligned}$$

Si osservi che il coefficiente del termine z^{-1} di questa serie, cioè 0, non è il residuo di f in $z = 0$. Tale residuo si trova sviluppando $f(z)$ in serie di Laurent nell'anello $A(0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^5+1}{z(1+z^2)} \\ &= \left(z^4 + \frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n+4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-1} \\ &= z^4 - z^2 + 1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \dots , \end{aligned}$$

da cui risulta, in accordo con quanto ricavato prima,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1.$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R},$$

specificando per quali valori di a esso risulta convergente.

[punteggio 6]

Si ponga $f(z) = z^a/(z^2+2z+1) = \mathrm{e}^{a\log z}/(z+1)^2$, assumendo per il logaritmo quel ramo la cui linea di diramazione coincide con il semiasse reale positivo

$$\log z = \ln r + \mathrm{i}\theta, \qquad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

La funzione f è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale positivo e del polo doppio in $z = -1$ dove ha residuo

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{a\log z}\right|_{z=-1} = \left.\mathrm{e}^{a\log z}\frac{a}{z}\right|_{z=-1} = -a\mathrm{e}^{a(\ln 1+\mathrm{i}\pi)} = -a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}.$$

Si integri f lungo il cammino chiuso orientato positivamente $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x) &= x + \mathrm{i}0, & r \le x \le R,\\
\gamma_R(\theta) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, & 0 \le \theta \le 2\pi,\\
\lambda_2(x) &= x - \mathrm{i}0, & R \ge x \ge r,\\
\gamma_r(\theta) &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, & 2\pi \ge \theta \ge 0.
\end{aligned}$$

Come al solito, $x \pm \mathrm{i}0$ sta a indicare $x \pm \mathrm{i}\varepsilon$ con ε infinitesimo positivo così che in rappresentazione polare $x + \mathrm{i}0 = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon}$ mentre $x - \mathrm{i}0 = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\varepsilon)}$. Per $r < 1 < R$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)\\
&= -2\pi\mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}.
\end{aligned}$$

Per gli integrali lungo i singoli cammini che compongono γ risulta

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{a(\ln x+\mathrm{i}0)}}{((x\mathrm{e}^{\mathrm{i}0})+1)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\mathrm{d}x = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{a\ln x}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^r \frac{\mathrm{e}^{a(\ln x+\mathrm{i}2\pi)}}{((x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi})+1)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{a\ln x}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{\mathrm{e}^{a\ln R}}{(R-1)^2}\,2\pi R = \frac{2\pi R^{a+1}}{(R-1)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \qquad \text{se } a+1 < 2,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{\mathrm{e}^{a\ln r}}{(1-r)^2}\,2\pi r = \frac{2\pi r^{a+1}}{(1-r)^2} \xrightarrow{r\to 0} 0, \qquad \text{se } a+1 > 0.$$

Pertanto, prendendo i limiti $r \to 0$ e $R \to \infty$, si conclude che per $-1 < a < 1$ l'integrale assegnato risulta convergente e di valore

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x &= \frac{-2\pi\mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}}\\
&= \frac{-2\pi\mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi a}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}\right)}\\
&= \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}.
\end{aligned}$$