MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2012/2013 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 29 aprile 2013

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Studiare la convergenza delle sequenti successioni $(z_n)_{n=1}^{\infty}$:

a) $z_n = \dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$, b) $z_n = \dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{n}$, c) $z_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2\mathrm{i}} - \sqrt{n+\mathrm{i}}\right)$.

Si assuma $\sqrt{w} = \sqrt{|w|}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Arg} w}$.

[punteggio 5]

---

a) Poiché $|z_n| = 1/n$ risulta immediatamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n} = 0.$$

b) Poiché $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ si ha

$$|z_n| = \left|\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n}\right| = \left|\frac{2^{n/2}}{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}\right| = \frac{2^{n/2}}{n}.$$

Si osservi che $n/2^{n/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0,$$

ovvero $z_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

c) Moltiplicando e dividendo z_n per $\sqrt{n+2\mathrm{i}} + \sqrt{n+\mathrm{i}}$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2\mathrm{i}} - \sqrt{n+\mathrm{i}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}\sqrt{n}}{\sqrt{n+2\mathrm{i}} + \sqrt{n+\mathrm{i}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1+2\mathrm{i}/n} + \sqrt{1+\mathrm{i}/n}} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 2 Posto $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$d(z_1, z_2) = \max\left(|\mathrm{Re}(z_1 - z_2)|, |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|\right),$$

dimostrare che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico e, infine, disegnare la palla chiusa $\overline{B}(3 + \mathrm{i}, 2)$.

[punteggio 5]

Per dimostrare che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico occorre mostare che d è una distanza, ovvero che $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sono soddisfatte le proprietà

a) $d(z_1, z_2) \geq 0$;

b) $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$;

c) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

d) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

La prima proprietà è vera in quanto il valore assoluto di un numero reale è sempre non negativo. La seconda segue dal fatto che $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $|\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| = |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)| = 0$ che a sua volta è vera se e solo se $z_1 = z_2$. La terza discende dal fatto che $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. Per quanto riguarda la proprietà triangolare si ha

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \max\left(|\mathrm{Re}(z_1 - z_2)|, |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|\right) \\ &\leq \max\left(|\mathrm{Re}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Re}(z_3 - z_2)|, |\mathrm{Im}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Im}(z_3 - z_2)|\right) \\ &\leq \max\left(|\mathrm{Re}(z_1 - z_3)|, |\mathrm{Im}(z_1 - z_3)|\right) \\ &\qquad + \max\left(|\mathrm{Re}(z_3 - z_2)|, |\mathrm{Im}(z_3 - z_2)|\right) \\ &= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2), \end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1, x_2| \leq |x_1, x_3| + |x_3, x_2|$.
Per definizione risulta

$$\begin{aligned} \overline{B}(3 + \mathrm{i}, 2) &= \{z \in \mathbb{C} : \; d(z, 3 + \mathrm{i}) \leq 2\} \\ &= \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : \; \max\left(|x - 3|, |y - 1|\right) \leq 2\}. \end{aligned}$$

La precedente disuguaglianza è soddisfatta dai punti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $|y - 1| \leq |x - 3| \leq 2$ oppure $|x - 3| \leq |y - 1| \leq 2$. È facile verificare che tali punti corrispondono al quadrato, bordo compreso, ottenuto dall'intersezione delle strisce $|x - 3| \leq 2$ e $|y - 1| \leq 2$, cioè il quadrato di vertici $(1, -1)$, $(5, -1)$, $(5, 3)$ e $(1, 3)$.

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale di

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}}.$$

[punteggio 6]

Le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono intere, pertanto i punti di non analiticità di f sono tutti e solo quelli determinati dal ramo principale della radice

$$\sqrt{\cos z} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(\cos z)\right).$$

La linea di diramazione del ramo principale di $\log(\cos z)$ è determinata dall'equazione

$$\cos z = -t, \qquad 0 \le t < \infty.$$

Per $0 \le t \le 1$ tale equazione ammette, come nel caso reale, la soluzione

$$z(t) = \arccos(-t) + 2\pi k, \qquad t \in [0,1], \qquad k \in \mathbb{Z},$$

che rappresenta i segmenti dell'asse reale $[\pi/2 + 2\pi k, 3\pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. Per $t > 1$ l'equazione risulta equivalente a

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^2 + 2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0,$$

la cui soluzione è

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = -t \pm \sqrt{t^2 - 1}.$$

Osservando che il membro di destra di quest'ultima espressione è reale negativo per ogni $t > 1$, si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= -\mathrm{i}\log\left[\left(t \mp \sqrt{t^2-1}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right] \\ &= (2k+1)\pi - \mathrm{i}\ln\left(t \mp \sqrt{t^2-1}\right), \qquad t \in (1,\infty), \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tali punti rappresentano gli assi immaginari passanti per $z = (2k+1)\pi$.

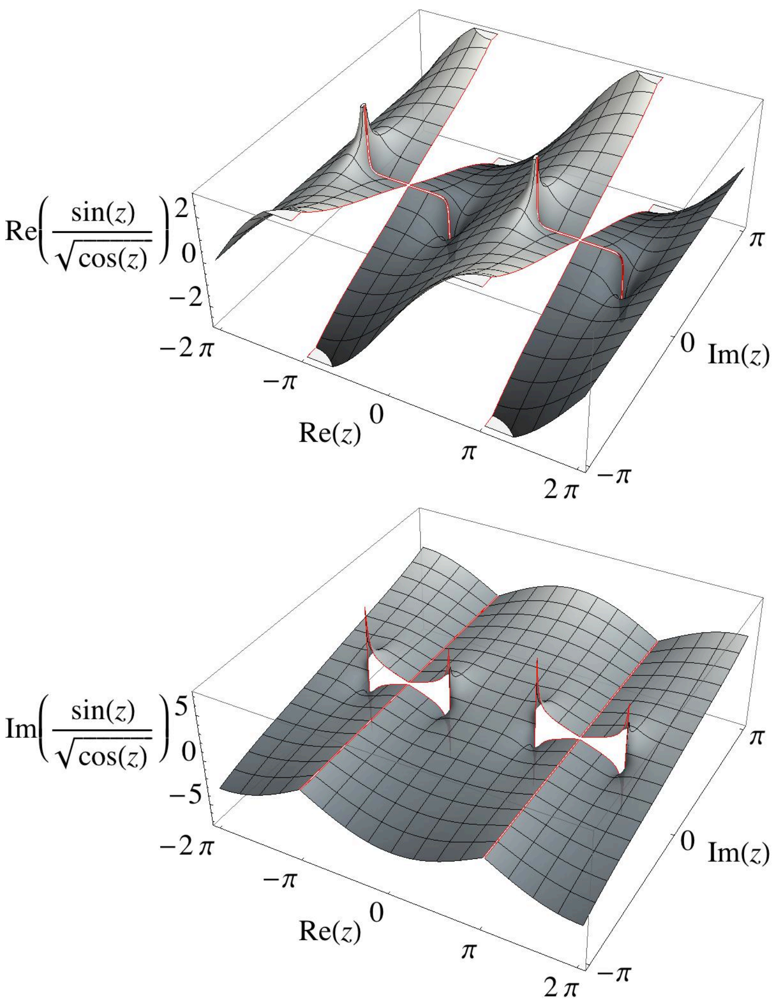

Figura 1: Parte reale e parte immaginaria del ramo principale di $\sin(z)/\sqrt{\cos(z)}$

Esercizio 4 Determinare fino all'ordine z^6 compreso lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ del ramo principale della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}}.$$

[punteggio 6]

Si osservi innanzitutto che f è analitica in un intorno di $z_0 = 0$, precisamente nella palla $B(0, \pi/2)$ come visto nell'esercizio precedente, e in tale intorno risulta

$$f(z) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sqrt{\cos z}.$$

Pertanto è sufficiente determinare lo sviluppo in serie di Taylor con centro in $z_0 = 0$ del ramo principale di $\sqrt{\cos z}$. Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \qquad |z| < \infty,$$
$$\sqrt{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k, \qquad |z| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos z} &= \sqrt{1 + (\cos z - 1)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{16}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)^3 + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}z^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\frac{1}{(2!)^2}\right)z^4 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{6!} + \frac{1}{8}\frac{2}{2!4!} - \frac{1}{16}\frac{1}{(2!)^3}\right)z^6 + O(z^8) \\
&= 1 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{96}z^4 - \frac{19}{5760}z^6 + O(z^8).
\end{aligned}$$

Tale sviluppo è valido all'interno del massimo disco centrato in $z_0 = 0$ e tale che per ogni z al suo interno risulti $\mathrm{Re}(\cos z - 1) > -1$. Questa condizione equivale a $|z| < \pi/2$ e possiamo concludere

$$\frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}} = z + \frac{1}{12}z^3 + \frac{19}{480}z^5 + O(z^7), \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 5 Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Dimostare che se f e $\overline{f}$ sono analitiche in D, allora f e $\overline{f}$ sono costanti in D.

[punteggio 5]

Si ponga $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ e $\overline{f}(z) = U(x, y) + \mathrm{i}V(x, y)$ con $z = x + \mathrm{i}y$. Poiché f e $\overline{f}$ sono analitiche in D, le funzioni u e v e le funzioni U e V soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann in ogni punto $(x, y) \in D$

$$\begin{aligned} &u_x = v_y \qquad u_y = -v_x, \\ &U_x = V_y \qquad U_y = -V_x. \end{aligned}$$

La seconda di queste coppie di equazioni è equivalente a

$$u_x = -v_y \qquad u_y = v_x$$

in quanto, essendo $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$, si ha $U(x, y) = u(x, y)$ e $V(x, y) = -v(x, y)$. Necessariamente allora deve risultare $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ $\forall (x, y) \in D$ e dunque $f'(z) = 0$ $\forall z \in D$. Essendo D aperto e connesso, per il Teorema 5.18 segue che f è costante in D.

Esercizio 6 Calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)+7}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$

[punteggio 6]

Si consideri la funzione complessa $f(z) = (z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+7)/(z^2+1)^2$ che ha due poli doppi in $z = \pm\mathrm{i}$ e la si integri lungo il perimetro γ, orientato positivamente, del quadrato di vertici $-R_1$, R_2, $R_2 + \mathrm{i}(R_1+R_2)$, $-R_1 + \mathrm{i}(R_1+R_2)$, con $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ e $R_1 + R_2 > 1$. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z)\\
&= 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+7}{(z+\mathrm{i})^2}\right|_{z=\mathrm{i}}\\
&= 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})(z+\mathrm{i})^2-(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+7)2(z+\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^4}\right|_{z=\mathrm{i}}\\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{-4\mathrm{i}(7+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1})}{16}\\
&= \frac{\pi}{2}(7+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}).
\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4}\int_{\lambda_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $\lambda_1(x) = x$, $-R_1 \le x \le R_2$, $\lambda_2(y) = R_2 + \mathrm{i}y$, $0 \le y \le R_1 + R_2$, $\lambda_3(x) = x + \mathrm{i}(R_1+R_2)$, $R_2 \ge x \ge -R_1$, e $\lambda_4(y) = -R_1 + \mathrm{i}y$, $R_1 + R_2 \ge y \ge 0$. Gli integrali lungo i cammini che compongono γ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R_1}^{R_2}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+7}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{0}^{R_1+R_2}\frac{y\mathrm{e}^{\mathrm{i}R_2-y}+7}{((R_2+\mathrm{i}y)^2+1)^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R_2}^{-R_1}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-(R_1+R_2)}+7}{((x+\mathrm{i}(R_1+R_2))^2+1)^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_4} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R_1+R_2}^{0}\frac{y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R_1-y}+7}{((-R_1+\mathrm{i}y)^2+1)^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0.$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+7}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(7+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}).$$

Prendendo la parte reale e quella immaginaria di questa espressione si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(x)+7}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{7}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}7,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-1},$$

da cui si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(x)+7}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(7+\mathrm{e}^{-1}).$$