# MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2007/2008 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 30 Aprile 2008

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |

| penalità | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| esercizio | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

<u>Esercizio 1</u> Si calcoli l'integrale di $f(z) = |z|^2$ lungo la poligonale di vertici $1$, $1+i$, $i$.

[punteggio 5]

---

Rappresentiamo la poligonale $[1, 1+i, i]$ mediante i due cammini $\gamma_3(t) = 1+it$ e $\gamma_4(t) = 1 + i - t$ con $0 \le t \le 1$ per i quali risulta

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} |z|^2\, dz &= \int_0^1 |\gamma_3(t)|^2\, \gamma_3'(t)dt \\ &= \int_0^1 |1+it|^2\, idt = i\int_0^1 (1+t^2)dt = i\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = i\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_4} |z|^2\, dz &= \int_0^1 |\gamma_4(t)|^2\, \gamma_4'(t)dt \\ &= \int_0^1 |1+i-t|^2\,(-1)dt = -\int_0^1 ((1-t)^2+1)dt \\ &= -\left(-\frac{1}{3}(1-t)^3 + t\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\gamma_3+\gamma_4} |z|^2\, dz = \int_{\gamma_3} |z|^2\, dz + \int_{\gamma_4} |z|^2\, dz = \frac{4}{3}(-1+i).$$

Esercizio 2 I polinomi di Legendre $P_n(\alpha)$ possono essere definiti come i coefficienti dello sviluppo in serie

$$(1-2\alpha z+z^2)^{-1/2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}P_k(\alpha)z^k.$$

Determinare $P_1$, $P_2$ e $P_3$.

[punteggio 6]

---

Osservando che

$$\frac{d^n}{dw^n}(1-w)^{-1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)(1-w)^{-1/2-n},$$

per $|w|<1$ il ramo principale di $(1-w)^{-1/2}$ ammette lo sviluppo in serie di Taylor

$$(1-w)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}+n-1}{n}w^n,$$

dove il coefficiente binomiale è definito da

$$\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}.$$

Posto $w=2\alpha z-z^2$, per $|z|$ sufficientemente piccolo si ha $|w|<1$ e quindi è possibile usare il precedente sviluppo per ottenere

$$\begin{aligned}(1-2\alpha z+z^2)^{-1/2} &= 1+\frac{1}{2}(2\alpha z-z^2)+\frac{3}{8}(2\alpha z-z^2)^2+\frac{5}{16}(2\alpha z-z^2)^3+\dots\\ &= 1+\alpha z+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\alpha^2\right)z^2+\left(-\frac{3}{2}\alpha+\frac{5}{2}\alpha^3\right)z^3+\dots.\end{aligned}$$

Da questa si ricava

$$\begin{aligned}P_1(\alpha) &= \alpha,\\ P_2(\alpha) &= -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\alpha^2,\\ P_3(\alpha) &= -\frac{3}{2}\alpha+\frac{5}{2}\alpha^3.\end{aligned}$$

Esercizio 3 Si supponga che $f(z)$ abbia un polo semplice in $z_0$ e $g(z)$ sia analitica in $z_0$. Dimostrare che

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)g(z) = g(z_0) \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

[punteggio 6]

---

Si osservi innanzitutto che si può scrivere $f(z) = h(z)/(z-z_0)$ con $h$ analitica e non nulla in $z_0$. Pertanto

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = h(z_0).$$

Se $g$ è identicamente nulla la relazione da dimostrare è banalmente vera in quanto $fg$ è identicamente nulla e il suo residuo in $z_0$ è nullo. Si supponga che $g$ abbia in $z_0$ uno zero di ordine $m$. In questo caso $g(z) = k(z)(z-z_0)^m$ con $k$ analitica e non nulla in $z_0$. Segue che $f(z)g(z) = h(z)k(z)(z-z_0)^{m-1}$. Poiché $hk$ è analitica e non nulla in $z_0$, se $m = 0$, cioé se $g(z_0) = k(z_0) \neq 0$, allora $fg$ ha un polo semplice in $z_0$ e risulta

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)g(z) = h(z_0)k(z_0) = g(z_0) \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Se $m \geq 1$, allora $fg$ è analitica in $z_0$ e quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)g(z) = 0 = g(z_0) \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z),$$

in quanto ora $g(z_0) = 0$.
Alternativamente, si osservi che $fg$ è analitica in un anello $0 < |z - z_0| < r$ e ivi sviluppabile in serie di Laurent. Detta $\gamma$ una curva chiusa semplice regolare a tratti orientata positivamente contenuta in $A(z_0, 0, r)$ e contenente $z_0$ al suo interno, il residuo di $fg$ in $z_0$ è per definizione

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)g(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)g(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)g(z)}{z - z_0} dz \\
&= h(z_0)g(z_0) = g(z_0) \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z),
\end{aligned}$$

dove l'integrale di $h(z)g(z)/(z - z_0)$, essendo $hg$ analitica su e dentro $\gamma$, è stato calcolato mediante la formula integrale in Cauchy.

Esercizio 4 Si sviluppi in serie di Laurent nell'anello $0 < |z-1| < 1$ la funzione

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^2}.$$

[punteggio 5]

Ricordando lo sviluppo in serie notevole

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k,$$

valido per $|w| < 1$, per $0 < |z-1| < 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\frac{-1}{z-2} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\frac{1}{1-(z-1)} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}k(z-1)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}k(z-1)^{k-3} \\
&= \sum_{n=-2}^{\infty}(n+3)(z-1)^n \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-1}+3+4(z-1)+5(z-1)^2+\dots .
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Si enunci e si dimostri il teorema noto come principio del massimo modulo.

[punteggio 5]

*Sia $f$ analitica e non costante in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Allora $|f|$ non ha massimo in $D$, cioé non esiste un punto $z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in D$.*

Si ragioni per assurdo e si supponga che $\exists z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in D$. Poiché $D$ è aperto, $\exists r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subset D$. Sia $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ il cammino circolare di centro $z_0$, raggio $\rho < r$, orientato positivamente. Per la formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt.$$

Prendendo il modulo di entrambi i membri di questa espressione e usando la disugualianza di Darboux, si ottiene

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + \rho e^{it}) \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| f(z_0 + \rho e^{it}) \right| \leq |f(z_0)|,$$

ovvero

$$\int_0^{2\pi} \left( |f(z_0)| - \left| f(z_0 + \rho e^{it}) \right| \right) dt = 0.$$

Essendo la funzione integranda non negativa, dal valore di questo integrale segue che $\left| f(z_0 + \rho e^{it}) \right| = |f(z_0)|$ $\forall t \in [0, 2\pi]$. D'altro canto $\rho < r$ è arbitrario e quindi $|f(z)| = |f(z_0)|$ $\forall z \in B(z_0, r)$. Per un lemma precedente si conclude che $f(z) = f(z_0)$ $\forall z \in B(z_0, r)$ e per il teorema sul prolungamento analitico si giunge alla contraddizione che $f(z) = f(z_0)$ $\forall z \in D$.

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{a+1}}dx, \qquad 0<a<2.$$

Suggerimento: si esegua, per cominciare, una integrazione per parti.

[punteggio 6]

Integrando per parti si ha

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{a+1}}dx = \frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{1+x^2}dx.$$

Posto $f(z) = e^{(1-a)\log z}/(1+z^2)$, dove $\log z$ è il ramo del logaritmo definito da $0 \le \arg z < 2\pi$, si osservi che $f$ ha poli semplici in $z = \pm i$. Si integri $f$ lungo il cammino chiuso $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2 + \gamma_r$, dove

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x) &= x + i0, & r \le x \le R,\\
\gamma_R(\theta) &= Re^{i\theta}, & 0 \le \theta \le \pi,\\
\lambda_2(x) &= xe^{i\pi}, & R \ge x \ge r,\\
\gamma_r(\theta) &= re^{i\theta}, & \pi \ge \theta \ge 0.
\end{aligned}$$

Per $R>1$ e $r<1$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_{\lambda_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\lambda_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz\\
&= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \pi e^{i(1-a)\pi/2}.
\end{aligned}$$

Per i singoli integrali si ottiene

$$\int_{\lambda_1} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{e^{(1-a)(\ln x + i0)}}{(xe^{i0})^2+1}e^{i0}dx = \int_r^R \frac{e^{(1-a)\ln x}}{x^2+1}dx,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\,dz = \int_R^r \frac{e^{(1-a)(\ln x + i\pi)}}{(xe^{i\pi})^2+1}e^{i\pi}dx = e^{i(1-a)\pi}\int_r^R \frac{e^{(1-a)\ln x}}{x^2+1}dx,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{e^{(1-a)\ln R}}{R^2-1}\,\pi R = \frac{\pi R^{2-a}}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \le \frac{e^{(1-a)\ln r}}{1-r^2}\,\pi r = \frac{\pi r^{2-a}}{1-r^2} \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

Prendendo i limiti $R\to\infty$ e $r\to 0$ si conclude

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi e^{i(1-a)\pi/2}}{1+e^{i(1-a)\pi}} = \frac{\pi i}{e^{ia\pi/2}-e^{-ia\pi/2}} = \frac{\pi/2}{\sin(\pi a/2)}$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{a+1}}dx = \frac{\pi/a}{\sin(\pi a/2)}, \qquad 0<a<2.$$