Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 1/A

Cesi/Presilla – A.A. 2007–08

Nome	
Cognome	

Il voto dello scritto sostituisce gli esoneri	1	2

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{2n-\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \big[\log(1+n)\big]^4 z^n$$

Soluzione.
(a) $R = e^{-2}$. Infatti, posto $a_n = ne^{2n-\sqrt{n}}$, si ha

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{ne^{2n-\sqrt{n}}}{(n+1)e^{2(n+1)-\sqrt{n+1}}} = e^{-2}\frac{1}{1+1/n}e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-2}$$

(b) $R = 1$. Infatti, posto $a_n = [\log(1+n)]^4$, si ha

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left[\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right]^4 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

(2) (4 pt). Se $z = x + iy$, esprimere la quantità seguente in termini di funzioni reali di x e y

$$\mathrm{Re}\big(e^{\sin z}\big)$$

Soluzione. $\mathrm{Re}\big(e^{\sin(x+iy)}\big) = e^{\mathrm{Re}\sin(x+iy)}\cos(\mathrm{Im}\sin(x+iy)) = e^{\sin x\cosh y}\cos(\cos x \sinh y)$

(3) (4 pt). Sia f una funzione intera (analitica su $\mathbb{C}$) che soddisfa la seguente condizione: esiste $M > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $|f(z)| \le M + \sqrt{|z|}$. Cosa posso affermare su f? (Dimostrare).

Soluzione. f è costante. Infatti dalla formula integrale di Cauchy e dall'ipotesi su $|f|$ segue che per $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=R}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|w-z|=R}\frac{|f(w)|}{|w-z|^2}dw \le \frac{M+R^{1/2}}{R}.$$

con R arbitrariamente grande in quanto f è intera. Si conclude che $f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ e quindi f costante in $\mathbb{C}$.

(4) (5 pt). Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z\,dz}{(z-2)(z^2+1)} \qquad \gamma(t) := 1 + i + 2e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$$

Soluzione. Posto $f(z) = z/(z-2)(z^2+1)$, f ha 3 poli semplici in 2 e $\pm i$. I poli in 2 e i sono interni alla circonferenza γ quello in $-i$ esterno, pertanto

$$\int_\gamma \frac{z\,dz}{(z-2)(z^2+1)} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)\right) = 2\pi i\left(\frac{2}{5} + \frac{i}{2i(i-2)}\right) = \frac{\pi}{5}(1+2i)$$

(5) (5 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di f

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin(z^2)\,(e^z-1)}$$

Soluzione. Ricordando gli sviluppi notevoli di $\cos z$, $\sin z$, e^z e $1/(1\pm z)$, si ha

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\dots}{\left(z^2-\frac{z^6}{6}+\frac{z^{10}}{120}+\dots\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\dots-1\right)} \\
&= \frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\dots}{z^3\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\dots\right)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\dots\right)\left[1-\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\dots\right)+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\dots\right)^2+\dots\right] \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1-\frac{z}{2}-\frac{5z^2}{12}+\dots\right) \\
&= \frac{1}{z^3}-\frac{1}{2z^2}-\frac{5}{12z}+\dots
\end{aligned}
$$

(6) (5 pt). Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^2-6x+10}$$

Soluzione. Si integri la funzione $f(z)=e^{iz}/(z^2-6z+10)$ lungo il cammino $\gamma=\lambda+\gamma_R$, dove $\lambda(x)=x$ con $-R\le x\le R$ e $\gamma_R(\theta)=Re^{i\theta}$ con $0\le\theta\le\pi$. Poiché f ha due poli semplici in $3\pm i$, per $R>\sqrt{10}$ si ha

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_\lambda f(z)dz+\int_{\gamma_R} f(z)dz \\
&= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=3+i} f(z) = 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{z-(3-i)}\right|_{z=3+i} = \frac{\pi e^{3i}}{e}.
\end{aligned}
$$

Prendendo la parte immaginaria di questa relazione e osservando che

$$\int_\lambda f(z)dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}\,dx}{x^2-6x+10}\xrightarrow{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{x^2-6x+10}$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz\xrightarrow{R\to\infty}0,$$

si conclude

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^2-6x+10}=\frac{\pi\sin 3}{e}.$$

(7) (4 pt). Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

Soluzione. Si veda uno dei libri di testo consigliati.

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 1/B+

Cesi/Presilla – A.A. 2007–08

Nome	
Cognome	

Il voto dello scritto sostituisce gli esoneri	3	4

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f appartiene a $C_1(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty$).

$$(a)\quad f(x) := \frac{x}{\big[\log(3+x^2)\big]^\alpha} \qquad (b)\quad f(x) := \frac{(1+|x|)^{3\alpha}}{x^2 + e^{\sin x}} \qquad (c)\quad f(x) := \exp\big[-[\log(1+x^4)]^\alpha\big]$$

Soluzione. (a) nessun α.

(b) Poichè $e^{\sin x}$ è sempre compreso fra -1 e 1 si ha

$$\frac{(1+|x|)^{3\alpha}}{x^2 + e^{\sin x}} \sim |x|^{3\alpha-2} \qquad \text{per } x \to \infty\,,$$

quindi $f \in C_1(\mathbb{R})$ per $\alpha < 1/3$.

(c) Se $\alpha = 1$, $f(x) = 1/(1+x^4)$, quindi $f \in C_1(\mathbb{R})$.

Se $\alpha > 1$, $f(x)$ tende a zero all'infinito più velocemente di qualsiasi potenza, quindi $f \in C_1(\mathbb{R})$.

Se $\alpha < 1$ si ha, quando $x \to \infty$,

$$[\log(1+x^4)]^\alpha < \frac{1}{6}\log(1+x^4) < \frac{1}{6}\log(x^6) = \log(|x|)\,,$$

dunque

$$f(x) > 1/|x| \qquad \text{per } x \to \infty\,.$$

Quindi $f \notin C_1(\mathbb{R})$.

Riassumendo: $f \in C_1(\mathbb{R})$ per $\alpha \geq 1$.

(2) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\quad D^3\big(xe^x\,\delta_0''\big) \qquad (b)\quad D^8\big(x^4\,\delta_0^{(5)}\big) \qquad (c)\quad D^2(|\sin x|)$$

Soluzione.

(a) $D^3\big(xe^x\,\delta_0\big) = D^3\big(-2\delta_0' + 2\delta_0\big) = 2\big(\delta_0^{(3)} - \delta_0^{(4)}\big)$

(b) Poichè

$$x^4\delta_0^{(5)} = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{n}{k}\big[D^k(x^4)\big]_{x=0}\,\delta_0^{(n-k)} = 5!\,\delta_0'\,,$$

ottengo $D^8\big(x^4\,\delta_0^{(5)}\big) = 120\,\delta_0^{(9)}$.

(c) Poichè $D(\operatorname{sgn}(\sin x)) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\delta_{k\pi}$, ottengo

$$\begin{aligned}
D^2(|\sin x|) &= D^2(\operatorname{sgn}(\sin x)\,\sin x)\\
&= D\Big(2\sin x\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\delta_{k\pi} + \operatorname{sgn}(\sin x)\cos x\Big)\\
&= D\big(\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x\big)\\
&= -\sin x\,\operatorname{sgn}(\sin x) + 2\cos x\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\delta_{k\pi}\\
&= -|\sin x| + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{k\pi}\,.
\end{aligned}$$

(3) (5 pt). Nello spazio euclideo $C_2[0,\infty)$ con il prodotto scalare canonico sia $W := \operatorname{span}\{e^{-x},\, x^2 e^{-x}\}$. Calcolare la proiezione ortogonale $\pi_W(x^n\, e^{-x})$, in cui n è un intero non negativo. Verificare la soluzione nei casi $n=0$ e $n=2$. (Ricordo[1] che $\int_0^\infty x^n\, e^{-ax}\, dx = n!/a^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a>0$).

Risp: $\pi_W(x^n\, e^{-x}) = \frac{n!}{2^n} e^{-x}\Big[1 + \frac{2}{5}\big(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\big)\big(x^2 - \frac{1}{2}\big)\Big]$.

(4) (3 pt). Sia $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ uno spazio euclideo complesso. Dimostrare che

$$|\langle u,v\rangle|^2 \le \langle u,u\rangle\,\langle v,v\rangle \qquad \forall u,v \in V$$

Soluzione. Vedi un qualsiasi testo di analisi funzionale.

(5) (8 pt). Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx = \Big(x_2 - x_1, \frac{x_3 - x_2}{2}, \frac{x_4 - x_3}{3}, \frac{x_5 - x_4}{4}, \dots\Big)$$

(a) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \dots)$
(b) Trovare gli autovalori di T. Scrivere esplicitamente i 3 autovalori più grandi in modulo e, per ognuno di essi, un autovettore corrispondente.
(c) Dire se $\lambda = 0$ appartiene allo spettro continuo di T (dimostrare).

Soluzione.

(a) $T^*(x) = \big(-x_1,\, x_1 - x_2/2,\, x_2/2 - x_3/3,\, x_3/3 - x_4/4,\, \dots\big)$
(b) Risolvendo l'equazione $Tx = \lambda x$ si trova

$$x_{k+1} = (1+\lambda)\,(1+2\lambda)\,\cdots\,(1+k\lambda)\,x_1 = x_1 \prod_{j=1}^{k}(1+j\lambda)$$

Se $\lambda = 0$ ottengo $x_{k+1} = x_1$ per ogni k, vale a dire l'unica soluzione è la soluzione costante che NON appartiene a ℓ_2, quindi $\lambda = 0$ non è un autovalore.

Se $\lambda = -1/n$ per un qualche n intero positivo, allora tutte le componenti di n a partire dalla $n+1$–sima si annullano. Il vettore

$$x_k = \begin{cases} \prod_{j=1}^{k-1}(1+j\lambda) & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

è una soluzione dell'equazione agli autovalori che appartiene a ℓ_2, quindi $\lambda = -1/n$ è autovalore.

Se $\lambda \neq 0$ ed inoltre λ non è della forma $-1/n$ allora si vede che $|x_k| \to \infty$ quando $k \to \infty$, quindi $x \notin \ell_2$ e dunque λ non può essere un autovalore.

Quindi l'insieme degli autovalori di T è $\{-1/n : n = 1,2,3,\dots\}$. I tre autovalori più grandi in modulo, con relativi autovettori sono

$$\begin{aligned} &\lambda = -1 && x = (1,0,0,0,\dots) \\ &\lambda = -1/2 && x = (1,1/2,0,0,\dots) \\ &\lambda = -1/3 && x = (1,2/3,2/9,0,0,\dots) \end{aligned}$$

[1] nella remota eventualità che qualcuno lo avesse dimenticato

(c) Poichè lo spettro è chiuso, lo zero, essendo un punto di accumulazione degli autovalori deve appartenere allo spettro. Ma sappiamo che $\lambda = 0$ non è un autovalore, quindi deve appartenere allo spettro continuo.

Alternativamente si dimostra in maniera diretta che T non è suriettivo. Infatti, risolvendo l'equazione $Tx = y$ si trova

$$x_k := x_1 + \sum_{j=1}^{k-1} j\, y_j\,.$$

Scegliendo $y_j := 1/j$ ho $y \in \ell_2$ ma

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$$

quindi $x \notin \ell_2$. Quindi y non appartiene all'immagine di T e dunque T non è suriettivo.

(6) (3 pt). Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(V)$ con $\|A\| < 1$. Dimostrare che $I - A$ è invertibile.

Soluzione. Vedi un qualsiasi testo di analisi funzionale.

(7) (4 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \le 1 \\ 0 & \text{se } 1 < |x| \le \pi \end{cases}$$

Sfruttando la convergenza nell'origine, si ottiene una formula che dà il valore di una particolare serie numerica. Scrivere questa formula.

Risp:

$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k}{k^2} \cos(kx)$.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k}{k^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$.