MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2011/2012 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 31 gennaio 2013

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Dimostrare le seguenti affermazioni, se vere, o fornire un controesempio, se false:
(a) L'unione di una infinità numerabile di aperti è un aperto;
(b) L'intersezione di una infinità numerabile di aperti è un aperto;
(c) L'unione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso;
(d) L'intersezione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso.

[punteggio 6]

(a) Vero. Sia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una infinità numerabile di insiemi aperti e si consideri un generico punto $x \in \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Deve allora esistere almeno un k_0 tale che $x \in A_{k_0}$. Poiché A_{k_0} è aperto per definizione $\exists\ \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset A_{k_0} \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ da cui segue che l'asserto.

(b) Falso. Si consideri in $\mathbb{C}$ l'infinità numerabile di aperti $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ dove $A_k = B(0, 1 + 1/k)$. Evidentemente si ha $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{B}(0, 1)$ che è un chiuso.

(c) Falso. Si consideri in $\mathbb{C}$ l'infinità numerabile di chiusi $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ dove $A_k = \overline{B}(0, 1 - 1/k)$. Evidentemente si ha $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = B(0, 1)$ che è un aperto.

(d) Vero. Sia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una infinità numerabile di insiemi chiusi. Per le leggi di de Morgan

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k)^c .$$

In virtù del punto a) il complementare dell'intersezione degli A_k è un aperto e quindi la loro intersezione è un chiuso.

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+c^n)z^n \quad c\in\mathbb{C} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}5^n z^{n!}$$

[punteggio 6]

a) Il coefficiente n-esimo della serie assegnata vale $a_n = n + c^n$ e si ha

$$|a_n|^{1/n} = |n+c^n|^{1/n} = \begin{cases} n^{1/n}\,|1+c^n/n|^{1/n} \\ |c|\,|1+n/c^n|^{1/n} \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1 & |c|\le 1 \\ |c| & |c|>1 \end{cases}$$

avendo usato $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Pertanto il raggio di convergenza vale

$$R = \begin{cases} 1 & |c|\le 1 \\ 1/|c| & |c|>1 \end{cases}$$

b) Il coefficiente n-esimo della serie assegnata riscritta nella forma canonica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ vale

$$a_k = \begin{cases} 5^{m_k} & \text{se } k = m_k! \text{ con } m_k \text{ intero} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La formula di Hadamard fornisce

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} |a_k|^{1/k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} 5^{m_k/m_k!} \\ &= \lim_{n\to\infty} 5^{1/(m_{k_n}-1)!} = 5^0 \end{aligned}$$

essendo m_{k_n} il più piccolo intero tale che $m_{k_n}! \ge n$. In conclusione $R = 1$.

Esercizio 3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\text{cotan}(\sqrt{z}) = 0$$

[punteggio 5]

Poiché $\text{cotan}(z) = \cos(z)/\sin(z)$, l'equazione proposta è equivalente a

$$\cos(\sqrt{z}) = 0$$

Posto $w = \sqrt{z}$, si ha

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 0$$

ovvero

$$\left(e^{iw}\right)^2 = -1$$

che fornisce

$$iw = \log(\pm i) = \log\left(1e^{\pm i\pi/2}\right) = \ln 1 + i(\pm\pi/2 + 2k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In conclusione, si ha

$$\sqrt{z} = (2n+1)\pi/2 \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e quindi le radici cercate sono

$$z = ((2n+1)\pi/2)^2 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esercizio 4 Assumendo per la funzione integranda il ramo principale, calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{C_R} z^{1/3}\ dz,$$

dove C_R è la circonferenza i raggio R centrata nell'origine e percorsa in verso antiorario.

[punteggio 6]

Si osservi che il ramo principale di $z^{1/3} = \exp[(1/3)\log z]$ è una funzione analitica sul cammino $C_{R,\varepsilon} = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ -\pi+\varepsilon \le \theta \le \pi-\varepsilon\}$ e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{3}{4}z^{4/3}$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} z^{1/3}\ dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{R,\varepsilon}} z^{1/3}\ dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{4} z^{4/3}\Big]_{z=Re^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{4} R^{4/3}\left(e^{i\frac{4}{3}(\pi-\varepsilon)} - e^{i\frac{4}{3}(-\pi+\varepsilon)}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{4} R^{4/3}\ 2i\sin\left[\frac{4}{3}(\pi-\varepsilon)\right] \\
&= \frac{3}{4} R^{4/3}\ 2i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= -i\frac{3\sqrt{3}}{4} R^{4/3}
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Si sviluppi in serie di Laurent nell'anello $0 < |z-1| < 1$ la funzione

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^2}.$$

[punteggio 6]

Ricordando lo sviluppo in serie notevole

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k,$$

valido per $|w| < 1$, per $0 < |z-1| < 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\frac{-1}{z-2} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\frac{1}{1-(z-1)} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}k(z-1)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}k(z-1)^{k-3} \\
&= \sum_{n=-2}^{\infty}(n+3)(z-1)^n \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + 3 + 4(z-1) + 5(z-1)^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(\exp(\cos\theta + i\sin\theta))d\theta$$

[punteggio 5]

Posto $z = e^{i\theta}$ e quindi $dz = ie^{i\theta}d\theta$ si ha

$$\int_0^{2\pi} \sin(\exp(\cos\theta + i\sin\theta))d\theta = \int_C \sin(\exp(z))\frac{dz}{iz}$$

dove $C = \{z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. La funzione integranda che appare nell'integrale sul cammino C è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del polo semplice in $z = 0$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_C \sin(\exp(z))\frac{dz}{iz} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin(\exp(z))}{iz} = 2\pi i \frac{\sin(\exp(0))}{i} = 2\pi \sin(1).$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2011/2012 – Prof. C. Presilla

Prova B4 – 31 gennaio 2013

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Nei casi seguenti, se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola una delle proprietà della norma.

1. $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|$;
2. $V = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$;
3. $V = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1}{1+|x|} dx$;
4. $V = \ell_4$ e $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3}$;
5. $V = \ell_1$ e $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right)^{1/3}$.

[punteggio 5]

1. No. Ad esempio per $x = (1, 1, 1) \neq 0$ si ha $\|x\| = 0$.
2. Sì.
3. No. Si prenda $f(x) = 1/\log(2 + |x|)$ per la quale risulta $\|f\| = \infty$.
4. No. Si prenda $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ con $x_k = k^{-1/3}$. Allora
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3} < \infty$$
cioè $x \in \ell_4$ ma
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$
5. Sì.

Esercizio 2 Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti funzioni appartengono a $C_1(\mathbb{R})$

(a) $|x|\, e^{-\alpha |x|^{1/3}}$ (b) $\dfrac{x^3 - \log(1+x^4)}{(x^2+1)^\alpha}$ (c) $\dfrac{x}{(x^2+1)(\log(1+x^2))^\alpha}$

[punteggio 6]

(a) $\alpha > 0$ (b) $\alpha > 2$ (c) mai

Per il punto (c), si osservi che f è continua in $x = 0$ per $\alpha < 0$. D'altro canto

$$\frac{x}{(x^2+1)(\log(1+x^2))^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\log(1+x^2))^{1-\alpha}$$

quindi $|f|$ è integrabile su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 1$. In conclusione, non esite un valore di α per cui $f \in C_1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,\pi]$ con prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ sia $W = \text{span}\{1,\sin x\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{1, \sin x\}$:

$$u_1(x) = 1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\pi 1^2 dx = \pi$$

$$u_2(x) = \sin x - \frac{\langle \sin x, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^\pi \left(\sin x - \frac{2}{\pi}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}$$

Usando il proiettore π_W si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k = \frac{\langle x, 1\rangle}{\pi} + \frac{\langle x, (\sin x - 2/\pi)\rangle}{\pi/2 - 4/\pi}$$

Osservando che $\langle x, 1\rangle = \pi^2/2$ mentre $\langle x, \sin x\rangle = \pi$, si ricava

$$w(x) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x - \frac{\pi}{2}.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^\pi \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 0.$$

Esercizio 4 Calcolare le seguenti distribuzioni semplificando il più possibile il risultato

(a) $x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)'$ (b) $(x(\log|x|)')'$ (c) $(\cos x \operatorname{sgn} x)'''$

[punteggio 6]

1. Usando $\theta' = \delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)' &= x(-\cos x\ \theta)' \\ &= x(\sin x\ \theta - \cos x\ \theta') \\ &= x \sin x\ \theta - x \cos x\ \delta_0 \\ &= x \sin x\ \theta \end{aligned}$$

2. Usando $(\log|x|)' = P(1/x)$, si ha

$$(x(\log|x|)')' = (xP(1/x))' = (1)' = 0$$

3. Usando $(\operatorname{sgn} x)' = 2\delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} (\cos x \operatorname{sgn} x)''' &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + \cos x\ 2\delta_0)'' \\ &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0)'' \\ &= (-\cos x \operatorname{sgn} x - \sin x\ 2\delta_0 + 2\delta_0')' \\ &= (-\cos x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0')' \\ &= \sin x \operatorname{sgn} x - \cos x\ 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\ &= \sin x \operatorname{sgn} x - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\ &= \sin|x| - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \end{aligned}$$

Esercizio 5 Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione $f(x)=\theta(|x|-\pi/2)\theta(\pi-|x|)\,\mathrm{sgn}(x)$ e studiare la convergenza puntuale della serie così ottenuta.

[punteggio 5]

Poiché $\theta(x)=1$ per $x\geq 1$ e $\theta(x)=0$ per $x<0$, si ha

$$f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi\leq x\leq -\pi/2 \\ 0 & -\pi/2<x<\pi/2 \\ 1 & \pi/2\leq x\leq \pi \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ è dispari e pertanto

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx=0 \qquad k=0,1,2,\ldots$$

mentre

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{k\pi}(\cos(k\pi/2)-\cos(k\pi)) \qquad k=1,2,\ldots \end{aligned}$$

In conclusione

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(\cos(k\pi/2)-\cos(k\pi))}{k\pi}\sin(kx)$$

Il prolungamento periodico da $(-\pi,\pi]$ a $\mathbb{R}$ di $f(x)$ è una funzione derivabile a tratti, con punti di discontinuità in $\pm\pi$ e $\pm\pi/2$. Pertanto la serie trigonometrica sopra scritta converge puntualmente a $f(x)$ per $x\in(-\pi,-\pi/2)\cup(-\pi/2,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)$ mentre per $x=\pm\pi$ e $x=\pm\pi/2$ converge rispettivamente a 0 e $\pm 1/2$.

<u>Esercizio 6</u> Sia T l'operatore lineare in $(C[-\pi,\pi];\mathbb{C},\|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = g(x)f(x) \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < -\pi/2 \\ \sin x & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di T.

[punteggio 6]

Si studi l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI-T)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI-T)f = 0$ è soddisfatta per $f \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ solo da $f = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)f = 0$ implica

$$(z - g(x))f(x) = 0 \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

- Se $z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, il fattore $z - g(x)$ è sempre non nullo per $x \in [-\pi,\pi]$ e quindi $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z \in (-1,1)$, il fattore $z - g(x)$ si annulla solo in $x_z = \arcsin z$. Pertanto $f(x) = 0\ \forall x \in [-\pi, x_z) \cup (x_z, \pi]$ ma dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z = \pm 1$, l'equazione $(zI - T)f = 0$ è soddisfatta per tutte quelle funzioni f continue in $[-\pi,\pi]$ e non nulle solo in $(\pi/2,\pi]$ (se $z = 1$) o solo in $[-\pi,-\pi/2)$ (se $z = -1$). Dunque T ha autovalori $z = \pm 1$ e a ciascuno di tali autovalori corrispondono infinite autofunzioni.

Si studi ora la suriettività di $zI - T$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ran}(zI - T)$ coincide con $(C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ ovvero se $\forall h \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ esiste $f \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ tale che $(zI - T)f = h$. Affinchè ciò accada deve essere

$$f(x) = \frac{h(x)}{z - g(x)} \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

- Se $z \in (-1,1)$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$ la f diverge in x_z e quindi risulta non continua. In tal caso $zI - T$ è non suriettivo ma, per quanto visto in precedenza, iniettivo, cioè $z \in \sigma_c(T)$.
- Se $z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, la funzione f, in quanto rapporto di funzioni continue con la funzione a denominatore mai nulla, è continua in $[-\pi,\pi]$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.

Riepilogando, $\sigma_p(T) = \{-1,1\}$, $\sigma_c(T) = (-1,1)$, $\rho(T) = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$.