Dottorato di Ricerca in Fisica XXIV ciclo - Prova A

Il candidato svolga gli esercizi proposti in un tempo massimo di quattro ore

Esercizio 1 Una sfera omogenea indeformabile di massa M e raggio R rotola senza strisciare lungo un piano indeformabile inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Sia g il valore dell'accelerazione di gravità locale.
a) Disegnare il diagramma delle forze rilevanti specificando natura e orientamento della reazione vincolare del piano.
b) Calcolare il momento di inerzia I della sfera rispetto a un asse passante per il suo centro.
c) Determinare l'accelerazione del centro di massa della sfera a_{cm} lungo il piano inclinato.
d) Aumentando l'inclinazione del piano inclinato si osserva che per $\alpha \geq \alpha_c$ il moto non è più di puro rotolamento. Che informazione se ne può dedurre?

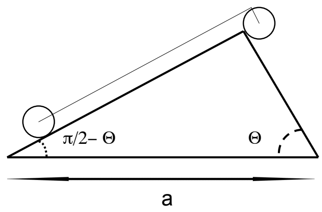
Esercizio 2 Prof. Abbino, Prof. Babbino e Prof. Ciccino effettuano separatamente misure di una stessa quantità (chiamiamola x) con tecniche diverse (dette A, B e C). Essi ripetono le misure nelle stesse identiche condizioni N_{A}, N_{B} e N_{C} volte rispettivamente. Indicando i risultati delle singole misure come x^i_{A}, x^j_{B} e x^k_{C}, con $i = 1, \ldots, N_{\text{A}}$, $j = 1, \ldots, N_{\text{B}}$ e $k = 1, \ldots, N_{\text{C}}$:
a) stimare la risoluzione sperimentale delle tre tecniche separatamente;
b) riportare valor medio di x ed errore su di esso come pubblicato dai i tre professori separatamente;
c) discutere come combinare le tre misure e dunque quale valore medio ed errore riportare come combinazione.

Esercizio 3 Un protone (massa $m \simeq 1.67 \times 10^{-27}$ kg e carica $q \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ C) viene accelerato in un condensatore a lastre piane e parallele partendo da fermo da una delle lastre, in presenza di una differenza di potenziale $\Delta V = 150$ V. Sulla seconda lastra è presente un foro attraverso il quale il protone esce dal condensatore ed entra in una regione di spazio con campo di induzione magnetica uniforme e costante di modulo $B = 3 \times 10^{-3}$ T che forma un angolo di 30° rispetto alla velocità della particella.
a) Trovare la velocità e l'energia cinetica del protone appena all'uscita dal condensatore;
b) descrivere la traiettoria del protone nella regione di spazio occupata dal campo B e calcolarne tutti i parametri caratteristici.
c) Determinare il lavoro eseguito dal campo B.

Esercizio 4 Una particella quantistica non relativistica di massa m è soggetta a un potenziale esterno unidimensionale $V(x) = V_0\theta(x) - \lambda\delta(x)$, dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino, $\theta(x) = 0$ per $x < 0$ e $\theta(x) = 1$ per $x \geq 0$, $\delta(x)$ è la distribuzione delta di Dirac e infine V_0 e λ due costanti positive.
a) Determinare, motivando la risposta in termini di proprietà della funzione d'onda, per quali intervalli dell'energia E della particella è possibile avere i) stati legati, ii) stati di diffusione corrispondenti alla particella proveniente da $x = -\infty$ e totalmente riflessa in $x = 0$, iii) stati di diffusione corrispondenti alla particella proveniente da $x = -\infty$ e parzialmente trasmessa a $x = +\infty$.
b) Stabilire la condizione a cui deve soddisfare λ affinché si abbia uno stato legato.
c) Calcolare l'energia di tale stato legato.

Dottorato di Ricerca in Fisica XXIV ciclo - Prova B

Il candidato svolga gli esercizi proposti in un tempo massimo di quattro ore



Esercizio 1 Due cilindri omogenei di uguale massa M e uguale raggio R sono collegati tramite un filo inestensibile ai rispettivi assi, intorno ai quali sono liberi di ruotare, e sono posti su due piani di un prisma a sezione triangolare con base di lunghezza a e angoli adiacenti complementari θ e $\pi/2-\theta$, vedi figura. Inizialmente i cilindri si trovano in quiete con uno di essi al vertice del triangolo; vengono poi lasciati liberi: quello a destra scende, l'altro sale, ambedue rotolano senza strisciare. Trascurando gli attriti dello snodo al vertice e quello di rotolamento e assumendo che g sia il valore dell'accelerazione di gravità locale:
a) scrivere il bilancio energetico dall'istante iniziale a quello finale nel quale il cilindro a destra arriva alla base del triangolo;
b) determinare la velocità $v_{\rm cm}$ del centro di massa dei cilindri all'istante finale.
c) Se si aumenta il valore dell'angolo θ mantenendo la sezione del prisma uguale a un triangolo rettangolo, si osserva che per $\theta \geq \theta_c$ il moto non è più di solo rotolamento: che informazione se ne può dedurre?

Esercizio 2 Vengono realizzati tre esperimenti, qui denotati come A, B e C per misurare una costante di tempo T. L'esperimento A misura $T = (990\pm3)$ ps, l'esperimento B misura $T = (0.92 \pm 0.03)$ ns e l'esperimento C misura $T = (950 \pm 12)$ ps.
a) Sotto l'ipotesi che tutti gli errori siano gaussiani e che i tre esperimenti misurino la stessa quantità, discutere come si combinano i risultati e determinare il risultato della loro combinazione (valore centrale ed errore).
b) Verificare l'ipotesi che i tre esperimenti misurino la stessa quantità calcolando un χ^2 e confrontandolo con il suo valore di aspettazione.

Esercizio 3 Uno ione di idrogeno (massa $m \simeq 1.67 \times 10^{-27}$ kg e carica $q \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ C) ruota con velocità tangenziale uniforme $v \simeq 3.0 \times 10^2$ m/s intorno ad un cilindro di raggio $R = 1$ mm ed altezza $L \gg R$, uniformemente carico con densità di carica elettrica ρ, a distanza $r > R$ dall'asse del cilindro. Si determini:
a) l'andamento del campo elettrico $\mathbf{E}$ generato dal cilindro in funzione della distanza dall'asse;
b) la densità di carica ρ, incluso il segno, trascurando forza peso ed irraggiamento;
c) il lavoro L che occorre fare per portare lo ione da distanza r a distanza $2r$.

Esercizio 4 Una particella quantistica non relativistica di massa m è soggetta a un potenziale esterno unidimensionale $V(x) = V_0\theta(x) - \lambda\delta(x)$, dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino, $\theta(x) = 0$ per $x < 0$ e $\theta(x) = 1$ per $x \geq 0$, $\delta(x)$ è la distribuzione delta di Dirac e infine V_0 e λ due costanti positive.
a) Determinare, motivando la risposta in termini di proprietà della funzione d'onda, per quali intervalli dell'energia E della particella è possibile avere i) stati legati, ii) stati di diffusione corrispondenti alla particella proveniente da $x = -\infty$ e totalmente riflessa in $x = 0$, iii) stati di diffusione corrispondenti alla particella proveniente da $x = -\infty$ e parzialmente trasmessa a $x = +\infty$.
Nell'ipotesi che l'energia E della particella corrisponda al caso ii) del punto a):
b) determinare il coefficiente di riflessione R verificando esplicitamente che risulta $R = 1$;
c) stabilire il valore di λ per cui, ad energia E fissata, la densità di probabilità di trovare la particella in $x = 0$ è massima.

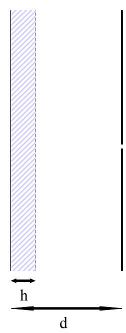
Dottorato di Ricerca in Fisica XXIV ciclo - Prova C

Il candidato svolga gli esercizi proposti in un tempo massimo di quattro ore

Esercizio 1 Due recipienti rigidi a pareti adiabatiche di uguale volume contengono entrambi $n = 2$ moli dello stesso gas perfetto ripettivamente alle temperature $T_1 = 330$ K e $T_2 = 285$ K. I due recipienti vengono messi in comunicazione aprendo un rubinetto e il gas si rimescola portandosi in una nuova configurazione di equilibrio alla temperatura T_3. Calcolare:
a) la variazione dell'energia interna totale ΔU del gas tra le configurazioni di equilibrio finale e iniziale;
b) il valore della temperatura di equilibrio T_3;
c) la variazione di entropia ΔS legata alla trasformazione commentandone, in particolare, il segno.

Esercizio 2 Vengono realizzati tre esperimenti, qui denotati come A, B e C per misurare una costante di tempo T. L'esperimento A misura $T = (990 \pm 3)$ ps, l'esperimento B misura $T = (0.92 \pm 0.03)$ ns e l'esperimento C misura $T = (950 \pm 12)$ ps.
a) Sotto l'ipotesi che tutti gli errori siano gaussiani e che i tre esperimenti misurino la stessa quantità, discutere come si combinano i risultati e determinare il risultato della loro combinazione (valore centrale ed errore).
b) Verificare l'ipotesi che i tre esperimenti misurino la stessa quantità calcolando un opportuno χ^2 e confrontandolo con il suo valore di aspettazione.

Esercizio 3 Un condensatore ad armature piane e parallele, distanti $d = 5$ mm e di area $\Sigma = 10$ cm^2, è riempito parzialmente con un dielettrico omogeneo parallelo alle armature, addossato ad una di esse e di stessa area Σ, per uno spessore $h = 1$ mm, vedi figura.
a) Determinare la capacità del condensatore sapendo che il dielettrico ha $\epsilon_r = 3.8$.
Da un buco nell'armatura lontana dal dielettrico, a potenziale $\Delta V = 150$ V rispetto all'altra armatura, viene immesso da fermo uno ione di idrogeno (massa $m \simeq 1.67 \times 10^{-27}$ kg e carica $q \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ C).

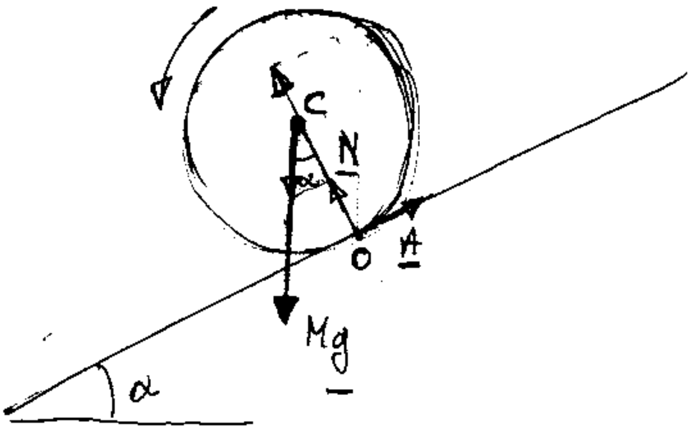


b) Determinare la velocità dello ione quando questo colpisce il dielettrico;
c) Fare uno schema grafico del campo elettrico e del potenziale in funzione della distanza dalle armature.

Esercizio 4 Una particella quantistica non relativistica di massa m è soggetta a un potenziale esterno unidimensionale $V(x) = V_0\theta(x) - \lambda\delta(x)$, dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino, $\theta(x) = 0$ per $x < 0$ e $\theta(x) = 1$ per $x \geq 0$, $\delta(x)$ è la distribuzione delta di Dirac e infine V_0 e λ due costanti positive.
a) Determinare, motivando la risposta in termini di proprietà della funzione d'onda, per quali intervalli dell'energia E della particella è possibile avere i) stati legati, ii) stati di diffusione corrispondenti alla particella proveniente da $x = -\infty$ e totalmente riflessa in $x = 0$, iii) stati di diffusione corrispondenti alla particella proveniente da $x = -\infty$ e parzialmente trasmessa a $x = +\infty$.
Nell'ipotesi che l'energia E della particella corrisponda al caso iii) del punto a):
b) determinare i coefficienti di riflessione e trasmissione R e T;
c) verificare esplicitamente che risulta $R + T = 1$.

Prova A

Esercizio 1



a) attrito volvente trascurabile

Forza peso $M\underline{g}$

reazione vincolare $\underline{N} + \underline{A}$ $\quad\quad$ $\underline{A}$ = attrito statico

$\underline{A}$ deve essere diretto come in figura (verso l'alto) per dare il verso giusto al momento $\underline{M}_C$ delle forze rispetto all'asse di rotazione ~~istantaneo~~ passante per C

b) $I = \frac{2}{5} MR^2$

c) $\underline{M}_O = \underline{OC} \times M\underline{g} = MgR \sin\alpha \; \hat{u} = (I + MR^2)\, \underline{\dot{\omega}}$

$$a_{CM} = \dot{\omega} R = \frac{MgR^2 \sin\alpha}{MR^2 + I} = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin\alpha$$

d) $M a_{CM} = Mg \sin\alpha - A$ $\quad\quad$ $A = \frac{12}{7} Mg \sin\alpha$

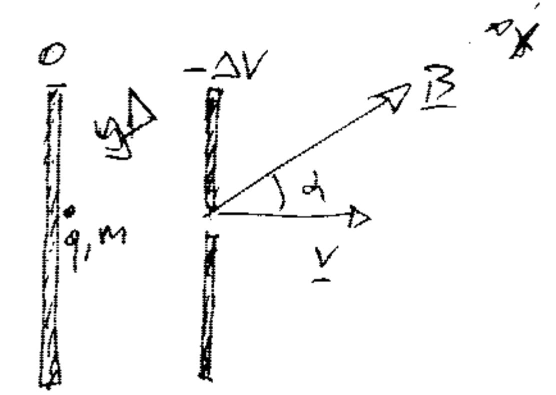
$0 = Mg\cos\alpha - N$ $\quad\quad$ $N = Mg\cos\alpha$

$A \leq \mu_S N$ $\quad\quad$ $\frac{12}{7} \sin\alpha \leq \mu_S \cos\alpha$

$\frac{12}{7} \tan\alpha \leq \mu_S$ $\quad\quad$ $\mu_S = \frac{12}{7} \tan\alpha_c$

Prova A

Esercizio 3



$$q\Delta V = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2 q \Delta V}{m}}$$

sistema di riferimento tale che $\underline{B} = (B, 0, 0)$

$\underline{v} = (v\cos\alpha, -v\sin\alpha, 0)$

$$\begin{cases} m\,\ddot{\underline{r}}(t) = q\,\dot{\underline{r}}(t) \times \underline{B} \\ \underline{r}(0) = (0,0,0) \\ \dot{\underline{r}}(0) = (v\cos\alpha, -v\sin\alpha, 0) \end{cases} \qquad \dot{r} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = qB\dot{z}(t) \\ m\ddot{z} = -qB\dot{y}(t) \end{cases} \qquad x(t) = v\cos\alpha\, t \qquad \frac{qB}{m} = \omega$$

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -\omega\left(y(t) - y(0)\right) \qquad \dot{z}(t) = -\omega y(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \qquad y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow & a = 0 \\ \dot{y}(0) = -v\sin\alpha & \omega b = -v\sin\alpha \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{v\sin\alpha}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$z(t) = -\omega\,\frac{-v\sin\alpha}{\omega}\left(\frac{\cos(\omega t)}{-\omega} - \frac{1}{-\omega}\right) = \frac{v\sin\alpha}{\omega}\left[1 - \cos(\omega t)\right]$$

moto traslatorio uniforme lungo B con velocità $v\cos\alpha$

moto circolare uniforme nel piano perpendicolare a B

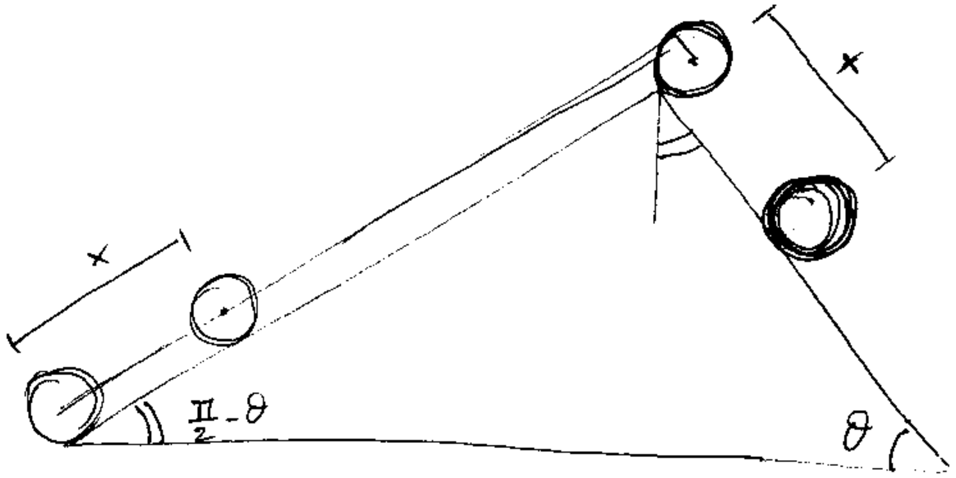
$$\left(z(t) - \frac{v\sin\alpha}{\omega}\right)^2 + \left(y(t) - 0\right)^2 = \left(\frac{v\sin\alpha}{\omega}\right)^2$$

di centro $y = 0$ $z = \frac{v\sin\alpha}{\omega}$ raggio $R = \frac{v\sin\alpha}{\omega}$

velocità angolare $\omega = \frac{qB}{m}$ (velocità tangenziale $v\sin\alpha$)

prova B

Esercizio (1)



variazione di energia potenziale gravitazionale tra la configurazione in cui il cilindro è sceso di x e quella iniziale

$$\Delta U(x) = Mg\,x\sin\theta - Mg\,x\cos\theta$$

variazione di energia cinetica

$$\Delta K(x) = \left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right)2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R}$$

$$= \frac{3}{2}M\dot{x}^2$$

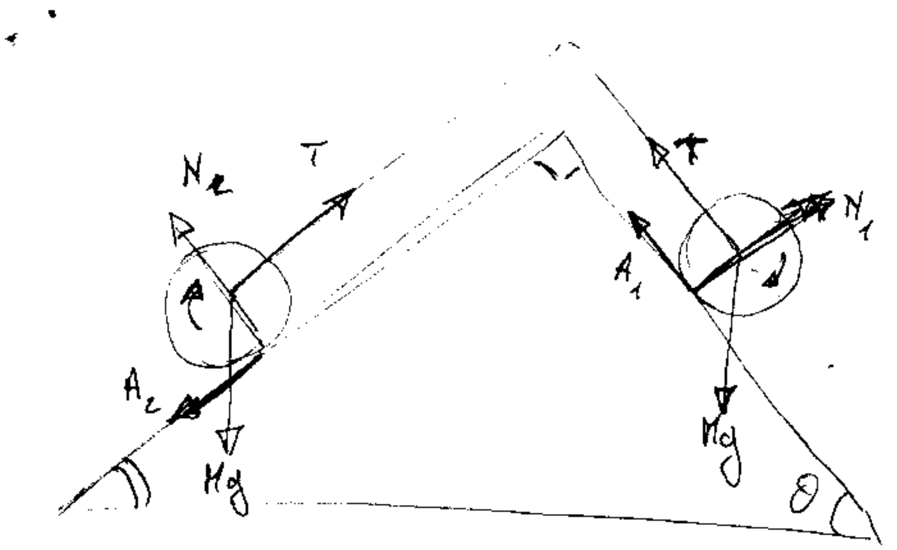
bilancio energetico $\quad \Delta U(x) = \Delta K(\dot{x}(x))$

$$\cancel{M}g\,x(\sin\theta - \cos\theta) = \frac{3}{2}\cancel{M}\dot{x}(x)^2$$

$$\dot{x}(x) = \sqrt{\frac{2}{3}g\,x(\sin\theta - \cos\theta)}$$

per $x = a\cos\theta$

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{2}{3}g\,a\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)}$$



$$\begin{cases} M\ddot{x} = Mg\sin\theta - A_1 - T \\ 0 = Mg\cos\theta - N_1 \\ M\ddot{x} = -Mg\cos\theta - A_2 + T \\ 0 = Mg\sin\theta - N_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I\dot{\omega} = A_1 R \\ I\dot{\omega} = A_2 R \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \dot{\omega} = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$A_1 = \frac{I\dot{\omega}}{R} = \frac{1}{2}M\ddot{x} \qquad A_2 = \frac{1}{2}M\ddot{x}$$

$$2M\ddot{x} = Mg(\sin\theta - \cos\theta) - \frac{1}{2}M\ddot{x} - \frac{1}{2}M\ddot{x}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{3}g(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$A_1 = \frac{1}{6}Mg(\sin\theta - \cos\theta) \qquad N_1 = Mg\cos\theta$$

$\frac{A_1}{N_1} \leq \mu_s$ soddisfatta finché c'è puro rotolamento

$$\mu_s = \frac{\frac{1}{6}\cancel{Mg}(\sin\theta_c - \cos\theta_c)}{\cancel{Mg}\cos\theta_c} = \frac{\sin\theta_c - \cos\theta_c}{\cos\theta_c}$$

presilla

isis.roma1.infn.it

Job ID: 36705
Job Name: stampapdf_Quietanza2007.asp.pdf
Printer Name: persico
Time: [02/Oct/2008:10:56:47 +0200]

controllo

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3} g\, t (\sin\theta - \cos\theta)$$

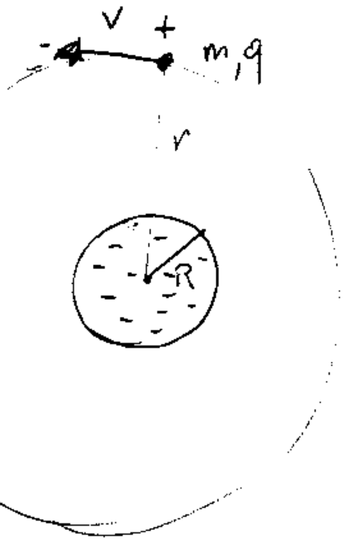
$$x(t) = \frac{1}{6} g\, t^2 (\sin\theta - \cos\theta)$$

$$x(t_0) = a\cos\theta \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{6\, a\cos\theta}{g(\sin\theta - \cos\theta)}}$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{1}{3} g (\sin\theta - \cos\theta) \sqrt{\frac{6\, a\cos\theta}{g(\sin\theta - \cos\theta)}} = \sqrt{\frac{2}{3}\, \underline{g a \cos\theta (\sin\theta - \cos\theta)}}$$

Prova B

Esercizio 3



$\underline{E}$ ha simmetria radiale ; modulo $E(r)$ determinato dalla legge di Gauss

$$\Phi(E) = E(r)\, 2\cancel{\pi} r\, \cancel{h} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cancel{\pi} R^2 \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

per avere equilibrio necessario deve essere $\rho<0$ e di valore

$\cancel{F = E(r) q}$ $\quad m\frac{v^2}{r} + E(r)\, q = 0$

$$\frac{mv^2}{\cancel{r}} + q\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 \cancel{r}} = 0 \qquad \rho = -\frac{2\varepsilon_0 m v^2}{q R^2}$$

lavoro fatto dal campo $= \int_{r}^{2r} q\, E(r')\, dr' = \frac{q \rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln 2 < 0$

~~lavoro~~

$$L = -\frac{q\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln 2 = \frac{\cancel{qR^2}}{\cancel{2\varepsilon_0}} \ln 2\ \frac{\cancel{2\varepsilon_0} m v^2}{\cancel{qR^2}} = m v^2 \ln 2 > 0$$

Prova C

Esercizio 1

a) $Q = 0 \qquad L = 0 \qquad \Delta U = Q - L = 0$

b) $n c_V T_1 + n c_V T_2 = 2n c_V T_3 \qquad T_3 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$

c) $S = n\left(c_V \ln T + R \ln \frac{V}{n} + \sigma_0'\right)$

$$\Delta S = 2n c_V \ln T_3 - n c_V \ln T_1 - n c_V \ln T_2$$

$c_V = \frac{3}{2}R$

$\cancel{nR = N/N_A k_B}$

$nR = N k_B \qquad n = \frac{N}{N_A}$

$R = k_B N_A$

$$= n \frac{3}{2} R \ln \frac{T_3^2}{T_1 T_2}$$

$$= \frac{3}{2} R n \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} > 0$$

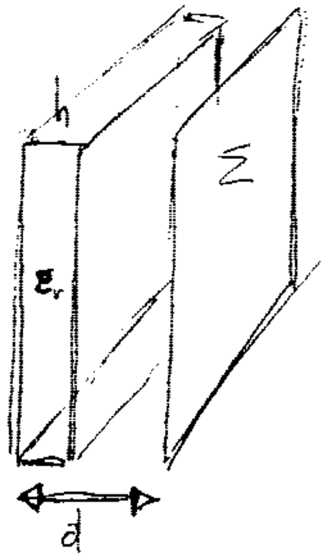
in quanto $(T_1 + T_2)^2 \geq 4 T_1 T_2$

$(T_1 - T_2)^2 \geq 0$

$$S = N k_B \left(\frac{3}{2} \ln T + \ln \frac{V}{N} + \sigma_0\right)$$

Prova C

Esercizio 3

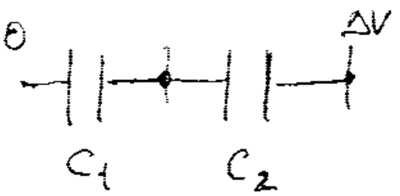


equivale a due condensatori in serie di capacità

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\Sigma}{h} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{d-h}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{h}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \Sigma} + \frac{d-h}{\varepsilon_0 \Sigma} = \frac{h + (d-h)\varepsilon_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \Sigma}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \Sigma}{h + (d-h)\varepsilon_r}$$



$$\frac{1}{2} m v^2 = \cancel{\frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2}\, q \Delta V_2 \qquad Q_1 = Q_2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V \frac{\varepsilon_r (d-h)}{h + \varepsilon_r (d-h)} \qquad C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2$$

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V \qquad \Delta V_2 = \Delta V \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$\cancel{\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} C_2 \Delta V^2 \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}}$$

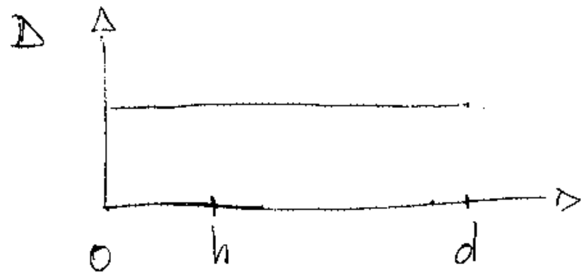
$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} = \Delta V \frac{C}{C_2} = \Delta V \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

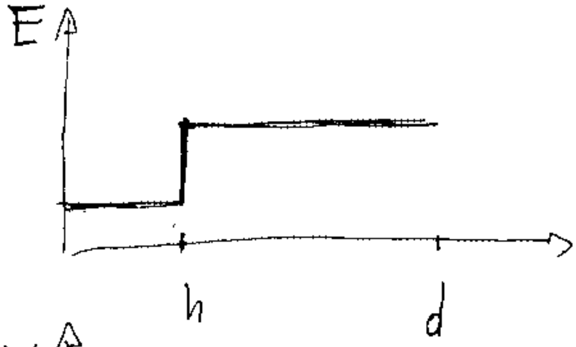
$$\cancel{\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \Delta V^2 \left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)^2 C = \frac{1}{2} \Delta V^2 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \Sigma}{h + (d-h)\varepsilon_r} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_r h}{d-h}}}$$

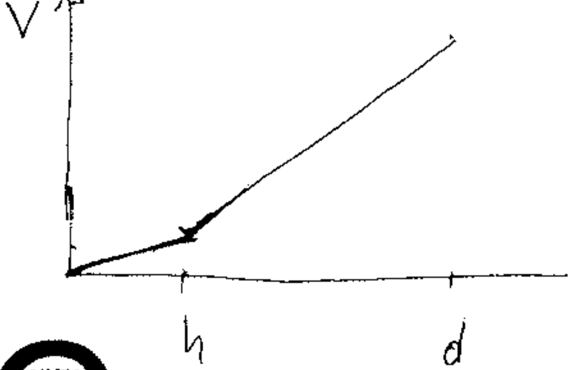
$$D_{1n} = D_{2n} = D \qquad \Phi(D) = \Sigma D = Q$$

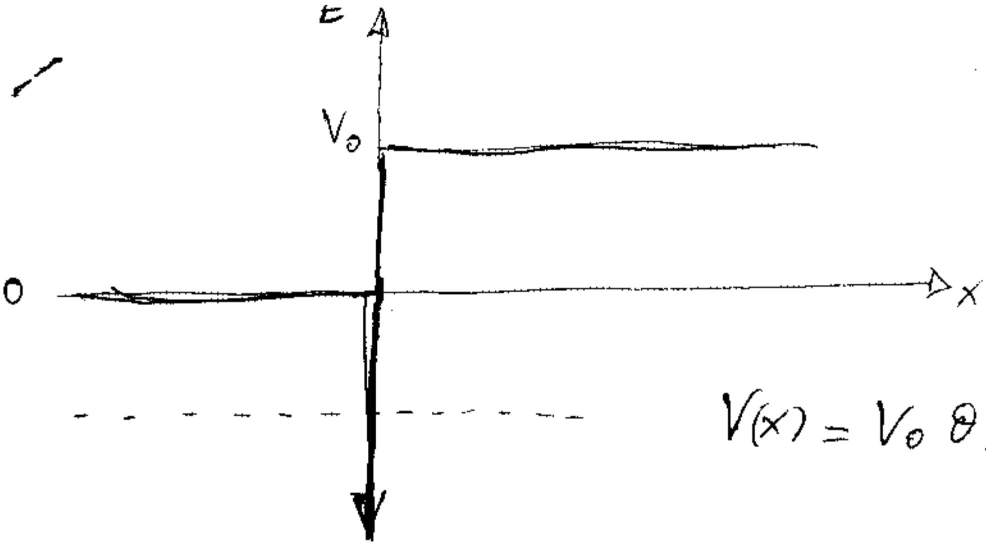
$$D = \frac{Q}{\Sigma} \qquad D = \varepsilon_0 E + \frac{\varepsilon_0 E}{\varepsilon_r - 1} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$$

$$E_{1n} = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \qquad E_{2n} = \frac{D}{\varepsilon_0}$$


D
0
h
d


E
h
d


V
h
d



$$V(x) = V_0\,\theta(x) - \lambda\,\delta(x)$$

$\boxed{\text{stati legati solo per } E<0}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$x<0 \qquad \psi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \qquad\qquad k \equiv \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} > 0$

$$\psi(x) = A e^{kx} \qquad A \in \mathbb{R}$$

$x>0 \qquad \psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi(x) \qquad\qquad k_0 \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} > 0$

$$\psi(x) = B e^{-k_0 x} \qquad B \in \mathbb{R}$$

ψ continua in $x=0$ $\qquad \psi(0^-) = \psi(0^+) \qquad A = B$

ψ' discontinua in $x=0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''(x)\,dx = \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)dx$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\lambda\,\psi(0)$$

$$\psi'(0^-) - \psi'(0^+) = \frac{2m}{\hbar^2}\lambda\,\psi(0) \qquad k A + k_0 B = \frac{2m}{\hbar^2}\lambda A$$

$$k + k_0 = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}$$

$$k_0^2 - k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} = (k_0 - k)(k_0 + k) = (k_0 - k)\,\frac{2m\lambda}{\hbar^2}$$

$$\begin{cases} k_0 + k = \dfrac{2m\lambda}{\hbar^2} \\ k_0 - k = \dfrac{V_0}{\lambda} \end{cases}$$

$$2k_0 = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} + \frac{V_0}{\lambda} \qquad 2k = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} - \frac{V_0}{\lambda}$$

$$k > 0 \qquad \frac{2m\lambda}{\hbar^2} > \frac{V_0}{\lambda} \qquad \lambda^2 > \frac{\hbar^2 V_0}{2m} \qquad \boxed{\lambda > \sqrt{\frac{\hbar^2 V_0}{2m}}}$$

$$k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2} - \frac{V_0}{\lambda}\right)^2 \qquad \boxed{E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{m\lambda}{\hbar^2} - \frac{V_0}{2\lambda}\right)^2}$$

normalizzazione

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = A^2\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2kx} dx + \int_0^{\infty} e^{-2k_0 x} dx\right)$$

$$= A^2\left(\left.\frac{e^{2kx}}{2k}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-2k_0x}}{-2k_0}\right|_0^{\infty}\right) = A^2\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k_0}\right)$$

$$= A^2 \frac{2(k_0 + k)}{4kk_0} = A^2 \frac{2\,\frac{2m\lambda}{\hbar^2}}{\left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2 - \left(\frac{V_0}{\lambda}\right)^2}$$

$$= A^2 \frac{\frac{m\lambda}{\hbar^2}}{\left(\frac{m\lambda}{\hbar^2}\right)^2 - \left(\frac{V_0}{2\lambda}\right)^2}$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{\left(\frac{m\lambda}{\hbar^2}\right)^2 - \left(\frac{V_0}{2\lambda}\right)^2}{\frac{m\lambda}{\hbar^2}}}}$$

Stati di diffusione totalmente riflessi a $x=0$
solo per $0 \leq E < V_0$

$x<0$ $\quad \psi''(x) = -\dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \qquad k = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}} > 0$

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$x>0$ $\quad \psi''(x) = \dfrac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi(x) \qquad k_0 = \sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} > 0$

$$\psi(x) = C e^{-k_0 x}$$

$$\begin{cases} A + B = C \\ ikA - ikB + k_0 C = \dfrac{2m\lambda}{\hbar^2}(A+B) \end{cases}$$

$$\left(ik + \left(k_0 - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)\right)A = \left(ik - k_0 + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)B$$

$$\frac{B}{A} = \frac{ik + k_0 - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}}{ik - k_0 + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}} \qquad \boxed{R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{k^2 + \left(k_0 - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2}{k^2 + \left(-k_0 + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2} = 1}$$

$$C = A\left(1 + \frac{B}{A}\right) = A\,\frac{ik \cancel{- k_0} \cancel{+ \frac{2m\lambda}{\hbar^2}} + ik \cancel{+ k_0} \cancel{- \frac{2m\lambda}{\hbar^2}}}{ik - k_0 + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}} = A\,\frac{2ik}{ik - k_0 + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}}$$

$$\rho(0) = |\psi(0)|^2 = |C|^2 = |A|^2\,\frac{4k^2}{k^2 + \left(k_0 - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2}$$

per E fissata $\rho(0)$ è massima per $\boxed{\lambda = \dfrac{\hbar^2}{2m}k_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar^2}{2m}(V_0 - E)}}$

Stati di diffusione parzialmente trasmessi a $x=+\infty$ solo per $V_0<E$

$$x<0 \qquad \psi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \qquad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0$$

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$x>0 \qquad \psi''(x) = -\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi(x) \qquad k_0 \equiv \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} > 0$$

$$\psi(x) = C e^{ik_0 x}$$

$$\begin{cases} A + B = C \\ ikA - ikB - ik_0 C = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} C \end{cases}$$

$$(ik + ik)A = \left(ik + ik_0 + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right) C$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2ik}{i(k+k_0) + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}}$$

$$\boxed{T = \frac{k_0}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{4kk_0}{(k+k_0)^2 + \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2}}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{C}{A} - 1 = \frac{2ik - i(k+k_0) - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}}{i(k+k_0) + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}} = \frac{i(k-k_0) - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}}{i(k+k_0) + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}}$$

$$\boxed{R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k-k_0)^2 + \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2}{(k+k_0)^2 + \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2}}$$

$$R + T = \frac{(k-k_0)^2 + \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2 + 4kk_0}{(k+k_0)^2 + \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2} = \frac{(k+k_0)^2 + \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2}{(k+k_0)^2 + \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2} = 1$$

Statistica

1. Prof. Abbino, Prof. Babbino e Prof. Ciccino effettuano separatamente misure di una stessa quantita' (chiamiamola x e supponiamola adimensionale) con tecniche diverse(dette A,B, e C). Essi ripetono le missure nelle stesse identiche condizioni N_A, N_B e N_C volte rispettivamente. Indicando le singole misure come x^i_A,x^j_B e x^k_C, con $i=1,N_A$, $j=1,N_B$,$k=1,N_C$:
    a. stimare la risoluzione sperimentale delle tre tecniche separatamente
    b. riportare valor medio di x ed errore su di esso come pubblicato dai i tre professori separatamente
    c. discutere come combinare le tre misure e dunque quale valore medio ed errore riportare come combinazione.

2. Vengono realizzati tre esperimenti, qui denotati come A,B, e C, per misurare una costante di tempo, T. L'esperimento A misura T=(990±3)ps, l'esperimento B T=(0.92±0.03)ns e l'esperimento C T=(950±12)ps.
    a. Sotto l'ipotesi che tutti gli errori siano gaussiani e che i tre esperimenti misurino la stessa quantita', discutere come si combinano i risultati e determinare il risultato della loro combinazione (valore centrale ed errore)
    b. Cosa si puo' calcolare per valutare la bonta' dell'ipotesi che i tre esperimenti misurino la stessa quantita'? Come si confronta il valore di questo indicatore nel caso degli esperimenti A,B e C con il suo valore di aspettazione in questo caso?

Temi

1) Si descrivano schematicamente, in al massimo una facciata di foglio protocollo, l'esperienza di Joule sull'espansione libera di un gas e le sue implicazioni sulle proprieta' dell'energia interna del gas stesso

2) Si descrivano schematicamente, in al massimo una facciata di foglio protocollo, l'esperienza di Joule sull'espansione libera di un gas, la variazione di entropia corrispondente sia dal punto di vista macroscopico che microscopico

3) Si descrivano schematicamente, in al massimo una facciata di foglio protocollo, l'esperienza di Joule sull'equivalenza tra calore e lavoro e le sue implicazioni.

Risposte

Statistica

1)

a) Si stima la risoluzione sperimentale tramite l'RMS delle misure effettuate:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N}(x^i_A - \mu_A)^2}{N_A - 1}}, \text{ dove } \mu_A = \sum_{i=1,N_A} x^i_A / N_A$$ ed analogamente per B, C avendo rimpiazzato i con j e k rispettivamente.

b) Dalle medie μ_α (α=A,B,C) gia' calcolate per risolvere il punto a) e sapendo che l'errore su μ_α si stima come $\sigma_\alpha / \sqrt{N_\alpha}$ si ottiene che le tre tecniche misurano $x=\mu_\alpha \pm \sigma_\alpha/\sqrt{N_\alpha}$

c) Sotto l'ipotesi che i singoli esperimenti stiano misurando la stessa quantita' e che il loro errore sia gaussiano si puo' costruire un $\chi^2(x_{comb}) = \sum_{k=A,B,C}\left(\frac{\mu_k - x_{comb}}{\sigma_k/\sqrt{N_k}}\right)^2$. La migliore stima combinata di detta quantita' e' il valore di x_{comb} che minimizza il χ^2, cioe' la media pesata:

$$x_{comb} = \frac{\sum_{k=A,B,C}\frac{\mu_k}{\sigma_k^2/N_k}}{\sum_{k=A,B,C}\frac{1}{\sigma_k^2/N_k}} \quad \text{e} \quad \sigma_{comb} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=A,B,C}\frac{1}{\sigma_k^2/N_k}}}$$

. In ~~questo caso dunque~~ $\cancel{x_{comb} = 9.98 \pm 0.03}$

2)

a) Sotto l'ipotesi che i singoli esperimenti stiano misurando la stessa quantita' e che il loro errore sia gaussiano si puo' costruire un $\chi^2(x_{comb}) = \sum_{k=A,B,C}\left(\frac{\mu_k - x_{comb}}{\bar{\sigma}_k}\right)^2$. La migliore stima combinata di detta quantita' e' il valore di x_{comb} che minimizza il χ^2, cioe' la media pesata:

$$x_{comb} = \frac{\sum_{k=A,B,C}\frac{\mu_k}{\bar{\sigma}_k^2}}{\sum_{k=A,B,C}\frac{1}{\bar{\sigma}_k^2}} \quad \text{e} \quad \sigma_{comb} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=A,B,C}\frac{1}{\bar{\sigma}_k^2}}}$$

. In questo caso dunque $x_{comb} = (987 \pm 3)ps$

b) Il valore minimo del χ^2 e' χ^2_{min}= 12.5 con 2 gradi di liberta'. Esso e' molto distante dal valore di aspettazione $E[\chi^2]$=2. E' dunque altamente improbabile che i tre esperimenti misurino la stessa quantita' e che gli errori siano corretti.