MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2020/2021 – Prof. C. Presilla
Prova A1 – 2 febbraio 2021

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Due particelle identiche di spin 1/2 hanno quantità di moto $\boldsymbol{p}_a$ e $\boldsymbol{p}_b$. Se lo spin totale del sistema delle due particelle è nullo, come si scrive la relativa funzione d'onda $\psi(\boldsymbol{r}_1, s_{1z}, \boldsymbol{r}_2, s_{2z})$ in termini di posizione e componente z dello spin di ciascuna particella (indici $\boldsymbol{r}_1$, s_{1z} e $\boldsymbol{r}_2$, s_{2z})?

[punteggio 4]]

---

2 Sia $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ con $\boldsymbol{J}_1$ e $\boldsymbol{J}_2$ operatori di momento angolare e siano j_1, m_1, j_2, m_2, j, m i numeri quantici, rispettivamente, di J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}, J^2, J_z. Se un sistema fisico si trova nello stato $|j_1 = 2, m_1 = 0, j_2 = 3/2, m_2 = -1/2\rangle$ quali risultati possono essere ottenuti in una misura di J_z? Con quali probabilità? Se invece si esegue una di misura di J^2 quali sono i possibili risultati e le rispettive probabilità di occorrenza?

[punteggio 4]

---

3 Si consideri un gas di particelle identiche non interagenti all'equilibrio termico a temperatura T. Se le particelle, ben descritte nell'ambito della meccanica classica, sono vincolate in una dimensione e sono sottoposte a un potenziale esterno $V(q) = a\,|q|$, quanto vale l'energia media per particella? Motivare la risposta.

[punteggio 4]

---

4 Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi\rangle$ la cui corrispondente funzione d'onda vale

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \frac{C}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\left(2 + (1+\mathrm{i})\frac{x}{x_0}\right)e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Determinare:
1) il valore della costante di normalizzazione C;
2) i possibili risultati di una misura di energia al tempo $t = 0$ e le relative probabilità di occorrenza;
3) il valore di aspettazione della posizione q e della quantità di moto p al generico tempo $t > 0$.
All'Hamiltoniana H_0 dell'oscillatore viene aggiunta la perturbazione $H' = \lambda(\hbar\omega/x_0)q$.
4) Determinare la correzione, fino all'ordine 2 in λ, degli autovalori di H_0 indotta da H'.
5) È possibile determinare gli autovalori esatti di $H_0 + H'$?

[punteggio 8]

5 Tre particelle identiche (non distinguibili) di massa m e spin 1/2 sono confinate all'interno di una sfera di raggio R e interagiscono mutuamente tramite il potenziale

$$V = g(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{S}_3), \qquad g > 0,$$

dove $\boldsymbol{S}_i$ rappresenta lo spin della i-esima particella. Ogni particella si trova in uno stato di momento angolare orbitale nullo e una misura dello spin totale del sistema lungo l'asse z fornisce il valore $S_z = (3/2)\hbar$, avendo definito $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3$. Determinare:
1) autovalori e autofunzioni dell'energia del sistema;
2) il valore dell'energia dello stato fondamentale.

[punteggio 6]

6 Un gas ideale costituito da N particelle identiche di massa m è vincolato nel piano xy con Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \sigma) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{a}{2}(q_x^2 + q_y^2) + b\sigma,$$

dove a, b sono costanti positive e σ è una variabile discreta che assume solo i valori ± 1. Nell'ipotesi di equilibrio termico a temperatura T e considerando le particelle come classiche, calcolare:
1) l'energia media E del gas;
2) il numero medio $N_+(R)$ di particelle del gas contenute all'interno del cerchio di raggio R centrato nell'origine e aventi $\sigma = 1$.
3) Nel caso in cui le N particelle siano fermioni di spin 1/2 e $b\sigma$ rappresenti l'accoppiamento dello spin con un campo esterno, determinare, a temperatura $T = 0$, l'energia di Fermi ϵ_F. Si supponga, per semplicità, $N \gg 1$.

[punteggio 7]

Esercizio (1)

Lo stato $|\psi\rangle$ del sistema è il prodotto dello stato spaziale e di quello di spin

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_{space} \otimes |\psi\rangle_{spin}$$

Lo stato $|\psi\rangle$ deve essere antisimmetrico sotto lo scambio delle due particelle (spin 1/2 $\Rightarrow$ fermioni).

Poiché lo spin totale è nullo, lo stato di spin non può che essere lo stato di singoletto $s=0$ $m=0$

$$|\psi\rangle_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|s_1=\tfrac{1}{2}\ m_1=\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |s_2=\tfrac{1}{2}\ m_2=-\tfrac{1}{2}\rangle - |s_1=\tfrac{1}{2}\ m_1=-\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |s_2=\tfrac{1}{2}\ m_2=+\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle\right)$$

Tale stato è antisimmetrico per lo scambio delle due particelle pertanto $|\psi\rangle_{space}$ deve essere simmetrico:

$$|\psi\rangle_{space} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\underline{p}_a\rangle \otimes |\underline{p}_b\rangle + |\underline{p}_b\rangle \otimes |\underline{p}_a\rangle\right)$$

Ricordando che $\langle \underline{r} | \underline{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$

e indicando con $\chi_\pm$ gli spinori autostati di S_z, la funzione d'onda totale è:

$$\psi(\underline{r}_1, \underline{s}_1, \underline{r}_2, \underline{s}_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^3}\left(e^{i(\underline{p}_a\cdot\underline{r}_1 + \underline{p}_b\cdot\underline{r}_2)} + e^{i(\underline{p}_b\cdot\underline{r}_1 + \underline{p}_a\cdot\underline{r}_2)}\right)$$

$$\otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(1)} \otimes \chi_-^{(2)} - \chi_-^{(1)} \otimes \chi_+^{(2)}\right)$$

Esercizio ②

Abbiamo

$$|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1\, j_2\, j\, m | j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle \; |j_1\, j_2\, j\, m\rangle$$

con $m = m_1 + m_2$

Nel caso $j_1 = 2$ $m_1 = 0$ $j_2 = \frac{3}{2}$ $m_2 = -\frac{1}{2}$ si ha $m = -\frac{1}{2}$ e $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$. Utilizzando le tabelle dei coefficienti di Clebsch - Gordon ricaviamo

$$|j_1=2\; m_1=0\; j_2=\tfrac{3}{2}\; m_2=-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{18}{35}}\, |j=\tfrac{7}{2}\; m=-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$+ \sqrt{\frac{3}{35}}\, |j=\tfrac{5}{2}\; m=-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}\, |j=\tfrac{3}{2}\; m=-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}\, |j=\tfrac{1}{2}\; m=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Dunque, in una misura di J_z è possibile ottenere il solo risultato $-\frac{\hbar}{2}$ (con probabilità 1).

In una misura di J^2 potremo invece ottenere i risultati

$\hbar^2 \frac{63}{4}$ $\quad$ $\hbar^2 \frac{35}{4}$ $\quad$ $\hbar^2 \frac{15}{4}$ $\quad$ $\hbar^2 \frac{3}{4}$

con rispettive probabilità

$\frac{18}{35}$ $\quad$ $\frac{3}{35}$ $\quad$ $\frac{1}{5}$ $\quad$ $\frac{1}{5}$

Notare che $\frac{18}{35} + \frac{3}{35} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$

Esercizio (3)

Per un sistema classico all'equilibrio canonico a temperatura T vale il teorema di equipartizione

$$\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = k_B T \, \delta_{ij}$$

dove $\langle \cdot \rangle$ media canonica e x_i, x_j gradi di libertà (coordinate canoniche $q_x \; q_y \; q_z \; p_x \; p_y \; p_z$) di una singola particella.

Nel caso specificato abbiamo $H = \frac{p^2}{2m} + a|q|$

$$\langle p \frac{\partial H}{\partial p} \rangle = \langle p \frac{p}{m} \rangle = 2 \langle \frac{p^2}{2m} \rangle = k_B T$$

$$\langle q \frac{\partial H}{\partial q} \rangle = \langle q \;\; a \, \mathrm{sign}(q) \rangle = \langle |q| a \rangle = k_B T$$

quindi

$$\langle H \rangle = \langle \frac{p^2}{2m} + a|q| \rangle = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle + \langle a|q| \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Esercizio (4)

$$\psi(x) = \frac{C}{\pi^{1/4} x_0^{1/2}} \left(2 + (1+i)\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \qquad x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)| \, dx = \frac{|C|^2}{\sqrt{\pi}\, x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2 + (1-i)\frac{x}{x_0}\right)\left(2 + (1+i)\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} dx$$

$$= \frac{|C|^2}{\sqrt{\pi}\, x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(2 + \frac{x}{x_0}\right)^2 + \frac{x^2}{x_0^2}\right) e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} dx$$

$$= \frac{|C|^2}{\sqrt{\pi}\, x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(4 + 4\frac{x}{x_0} + 2\frac{x^2}{x_0^2}\right) e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} dx \qquad \frac{x}{x_0} = u$$

$$= \frac{|C|^2}{\sqrt{\pi}\, \cancel{x_0}} \cancel{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(4 + 4u + 2u^2\right) e^{-u^2} du$$

$$= \frac{|C|^2}{\sqrt{\pi}} \left(4\sqrt{\pi} + u\left(-e^{-u^2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 1\left(-e^{-u^2}\right) du\right)$$

$$= \frac{|C|^2}{\sqrt{\pi}} \left(4\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}\right) = |C|^2\, 5$$

Scegliamo $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5 x_0 \sqrt{\pi}}} \left(2 + (1+i)\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$

Autofunzioni H.O.

$$\psi_0(x) = \langle 0 | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \qquad E_0 = \hbar\omega\,\frac{1}{2}$$

$$\psi_1(x) = \langle 1 | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2 x_0\sqrt{\pi}}}\, 2\frac{x}{x_0}\, e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \qquad E_1 = \hbar\omega\,\frac{3}{2}$$

$$\psi_2(x) = \langle 2 | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{8 x_0\sqrt{\pi}}} \left(4\frac{x^2}{x_0^2} - 2\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0}} \qquad E_2 = \hbar\omega\,\frac{5}{2}$$

$$\psi_3(x) = \langle 3 | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{48 x_0\sqrt{\pi}}} \left(8\frac{x^3}{x_0^3} - 12\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0}} \qquad E_3 = \hbar\omega\,\frac{7}{2}$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} + \frac{1+i}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} \frac{x}{x_0} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \psi_0(x) + \frac{1+i}{\sqrt{10}} \psi_1(x)$$

Misurando H stante il sistema nello stato $|\psi\rangle$ possiamo trovare i valori E_0 con probabilità $\frac{4}{5}$

E_1 con probabilità $\frac{|1+i|^2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Al tempo t

$$|\psi, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\psi\rangle$$
$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} |0\rangle \frac{2}{\sqrt{5}} + e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} |1\rangle \frac{1+i}{\sqrt{10}}$$

Ricordando che

$$q = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\eta^{+} - \eta\right) \qquad p = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\eta^{+} + \eta\right)$$

$$\eta^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad \eta|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

Abbiamo

$$q|\psi, t\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \frac{-i}{\sqrt{2}} x_0 |1\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{10}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}$$
$$\left(\frac{-ix_0}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,|2\rangle + \frac{ix_0}{\sqrt{2}}|0\rangle\right)$$

$$\langle\psi, t| q |\psi, t\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t} \frac{1+i}{\sqrt{10}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \frac{ix_0}{\sqrt{2}}$$
$$+ \frac{1-i}{\sqrt{10}} e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t} \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \frac{-ix_0}{\sqrt{2}}$$
$$= (-i-1)\frac{\sqrt{2}}{5} e^{i\omega t} \frac{x_0}{\sqrt{2}} + (i-1)\frac{\sqrt{2}}{5} e^{-ix_0 t} \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$
$$= \left(-\frac{2}{5}\cos(\omega t) + \frac{2}{5}\sin(\omega t)\right) x_0$$

$$p|\psi,t\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}x_0}\left(\frac{2}{\sqrt5}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|1\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{10}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left(\sqrt2|2\rangle+|0\rangle\right)\right)$$

$$\langle\psi,t|p|\psi,t\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt2 x_0}\left(\frac{2}{\sqrt5}e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t}\frac{1+i}{\sqrt{10}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\right.$$

$$\left. + \frac{1-i}{\sqrt{10}}e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t}\frac{2}{\sqrt5}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{x_0\sqrt2}\left(\frac{\sqrt2}{5}(1+i)e^{-i\omega t} + \frac{\sqrt2}{5}(1-i)e^{i\omega t}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{x_0}\left(\frac{2}{5}\cos(\omega t) + \frac{2}{5}\sin(\omega t)\right)$$

$$\lambda H' = \lambda\frac{\hbar\omega}{x_0}q \qquad H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac12 m\omega^2 q^2$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$E_n^{(0)} = \left(n+\frac12\right)\hbar\omega$$

$$E_n^{(1)} = \langle E_n^{(0)}|H'|E_n^{(0)}\rangle = \langle n|\frac{\hbar\omega}{x_0}q|n\rangle = 0$$

$$E_n^{(2)} = -\sum_{m\neq n}\frac{|\langle E_m^{(0)}|H'|E_n^{(0)}\rangle|^2}{E_m^{(0)}-E_n^{(0)}}$$

$$= -\left(\frac{\hbar\omega}{x_0}\right)^2\sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|q|n\rangle|^2}{(m-n)\hbar\omega}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{x_0^2}\left(-|\langle n-1|q|n\rangle|^2 + |\langle n+1|q|n\rangle|^2\right)$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{\hbar}m\omega\frac{\hbar}{2m\omega}\left(-|\langle n-1|\eta|n\rangle|^2 + |\langle n+1|\eta^\dagger|n\rangle|\right)$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{2}(-n+n+1)$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{2}$$

In realtà la correzione in λ^2 è esatta.

Infatti l'Hamiltoniana $H_0 + \lambda H'$ può essere diagonalizzata esattamente

$$H_0 + \lambda H' = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \lambda \frac{\hbar\omega}{x_0} q$$

$$= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(q^2 + \frac{2}{m\omega^2} \lambda \frac{\hbar\omega}{x_0} q + \frac{\lambda^2\hbar^2}{m^2\omega^2 x_0^2} - \frac{\lambda^2\hbar^2}{m^2\omega^2 x_0^2} \right)$$

$$= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(q + \frac{\lambda\hbar}{m\omega x_0} \right)^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\lambda^2\hbar^2}{m^2\omega^2 x_0^2}$$

$$= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \tilde{q}^2 - \lambda^2 \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= \tilde{H} - \lambda^2 \frac{\hbar\omega}{2}$$

Gli autovalori dell'Hamiltoniana $\tilde{H}$ sono $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ quindi quelli di $H_0 + H'$ sono

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \lambda^2 \frac{\hbar\omega}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Esercizio 5

Le particelle non interagiscono nei gradi di libertà spaziali e ciascuna di esse è descritta da una funzione d'onda radiale ridotta $u(r)$ che soddisfa l'eqn. di Schrödinger 1D

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) = E\,u(r)$$

con condizioni al bordo $u(0) = u(R) = 0$

Si noti che il potenziale centrifugo è nullo in quanto nullo è il momento angolare orbitale.

La soluzione è

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mR^2}n^2 \qquad u_n(r) = \sqrt{\frac{2}{R}}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Le funzioni d'onda complete (3D) di singola particella sono pertanto

$$\psi_{n\,l=0\,m=0}(r,\theta,\varphi) = R_{n\,l=0}(r)\,Y_{00}(\theta,\varphi)$$

$$= \frac{1}{r}u_n(r)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Per quanto riguarda l'interazione di spin, si osservi che

$$S^2 = \underline{S}\cdot\underline{S} = (\underline{S}_1+\underline{S}_2+\underline{S}_3)\cdot(\underline{S}_1+\underline{S}_2+\underline{S}_3)$$

$$= S_1^2+S_2^2+S_3^2+2(\underline{S}_1\cdot\underline{S}_2+\underline{S}_1\cdot\underline{S}_3+\underline{S}_2\cdot\underline{S}_3)$$

Poiché $S_z = \frac{3}{2}\hbar$ non può che essere $S^2 = \hbar^2\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{15}{4}\hbar^2$.

Inoltre $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \hbar^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \hbar^2\frac{3}{4}$.

Pertanto il potenziale d'interazione vale

$$V = g\frac{1}{2}\left(S^2-(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\right) = g\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\hbar^2-3\cdot\frac{3}{4}\hbar^2\right) = \frac{3}{4}g\hbar^2$$

Lo stato di spin è completamente simmetrico

$$\chi_{SS_z}(1,2,3) = \chi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}(1,2,3) = \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\otimes\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\otimes\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$

dove $\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)$ è lo spinore autofunzione di S_{1z} con autovalore $\frac{\hbar}{2}$: $\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Dovendo essere la funzione d'onda totale dei 3 fermioni completamente antisimmetrica, la parte spaziale della funzione d'onda deve essere un prodotto antisimmetrizzato delle funzioni $\psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}\,r}u_n(r)$.

Il sistema ha quindi autofunzioni dell'energia date da

$$\Psi_{n_1,n_2,n_3;\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(r_1,r_2,r_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}}\det\begin{vmatrix}\psi_{n_1}(r_1) & \psi_{n_1}(r_2) & \psi_{n_1}(r_3)\\ \psi_{n_2}(r_1) & \psi_{n_2}(r_2) & \psi_{n_2}(r_3)\\ \psi_{n_3}(r_1) & \psi_{n_3}(r_2) & \psi_{n_3}(r_3)\end{vmatrix}\otimes\chi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}(1,2,3)$$

con autovalori

$$E_{n_1,n_2,n_3;\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mR^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right) + \frac{3}{4}g\hbar^2$$

L'autovalore minimo (e la corrispondente autofunzione) si ottiene per $n_1=1$ $n_2=2$ $n_3=3$ e vale

$$E = \left(\frac{7\pi^2}{mR^2} + \frac{3}{4}g\right)\hbar^2$$

Esercizio 6

$$Z_1 = \frac{1}{h^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_x \int_{-\infty}^{+\infty} dq_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \; e^{-\beta H(\underline{q}, \underline{p}, \sigma)}$$

$$= \frac{1}{h^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dq_x \, e^{-\beta \frac{a}{2} q_x^2} \right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \, e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \right)^2 \left(e^{-\beta b} + e^{+\beta b} \right)$$

$$= \frac{1}{h^2} \; \frac{2\pi}{\beta a} \; \frac{2\pi m}{\beta} \; 2 \cosh(\beta b)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{h} \right)^2 \frac{2m}{a \beta^2} \cosh(\beta b)$$

$$E = - N \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_1$$

$$= - N \left(- \frac{2}{\beta} + \frac{b \sinh(\beta b)}{\cosh(\beta b)} \right)$$

$$= N \left(2 k_B T - b \tanh\left(b / k_B T \right) \right)$$

$$N_+(R) = N \, P_+(R)$$

$P_+(R)$ = probabilità che una particella con $\sigma = 1$ si trovi nella regione $q_x^2 + q_y^2 \leq R^2$

$$= \frac{\frac{1}{h^2} \sum_\sigma \int d\underline{q} \int d\underline{p} \; e^{-\beta H(\underline{q}, \underline{p}, \sigma)} \, \delta_{\sigma,1} \, \theta\left(R - \sqrt{q_x^2 + q_y^2}\right)}{Z_1}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq \; e^{-\beta \frac{a}{2}(q_x^2 + q_y^2)} \, \theta\left(R - \sqrt{q_x^2 + q_y^2}\right) e^{-\beta b}}{\frac{2\pi}{\beta a} \; 2 \cosh(\beta b)}$$

$$= \frac{\int_0^\infty 2\pi r\,dr\, e^{-\beta\frac{a}{2}r^2}\,\theta(R-r)\quad e^{-\beta b}}{\frac{2\pi}{a\beta}\left(e^{\beta b}+e^{-\beta b}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{\beta a}{2}}\,r \equiv u$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}\int_0^{R\sqrt{\frac{\beta a}{2}}} e^{-u^2}\,u\,du\ \cancel{\frac{2}{\beta a}}}{\cancel{\frac{2\pi}{a\beta}}}\quad \frac{e^{-\beta b}}{e^{\beta b}+e^{-\beta b}}$$

$$= \left(1 - e^{-\beta\frac{a}{2}R^2}\right)\frac{1}{1+e^{2\beta b}}$$

Per $T=0$ il numero di stati di particella singola per fermioni di componente di spin + è

$$N_+(\varepsilon) = \frac{1}{h^2}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\ \theta\left(\varepsilon - H(\underline{q},\underline{p},1)\right)$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^{\sqrt{(\varepsilon-b)\frac{2}{a}}} 2\pi q_r\,dq_r\int_0^{\sqrt{(\varepsilon-b-\frac{a}{2}q_r^2)2m}} 2\pi p_r\,dp_r\qquad \theta(\varepsilon-b)$$

dove $q_r = \sqrt{q_x^2+q_y^2}$ $\quad p_r=\sqrt{p_x^2+p_y^2}$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^{\sqrt{(\varepsilon-b)\frac{2}{a}}} 2\pi q_r\,dq_r\quad \pi\left(\varepsilon-b-\frac{a}{2}q_r^2\right)2m\quad \theta(\varepsilon-b)$$

$$= \frac{1}{h^2}\,2\pi m\left((\varepsilon-b)(\varepsilon-b)\frac{2}{a}\pi - \frac{a}{2}\pi 2\,\frac{1}{4}(\varepsilon-b)^2\left(\frac{2}{a}\right)^2\right)\theta(\varepsilon-b)$$

$$= \frac{2\pi m}{h^2}\left(\frac{2\pi}{a}(\varepsilon-b)^2 - \frac{2}{a}\frac{\pi}{2}(\varepsilon-b)^2\right)\theta(\varepsilon-b)$$

$$= \frac{m}{2\hbar^2 a}(\varepsilon-b)^2\ \theta(\varepsilon-b)$$

Nel caso di fermioni con componente di spin $-$, il calcolo è identico basta sostituire $b \to -b$

$$N_-(\varepsilon) = \frac{m}{2\hbar^2 a} (\varepsilon + b)^2 \, \theta(\varepsilon + b)$$

$$N(\varepsilon) = N_+(\varepsilon) + N_-(\varepsilon)$$

$$= \frac{m}{2\hbar^2 a} \left((\varepsilon - b)^2 \theta(\varepsilon - b) + (\varepsilon + b)^2 \theta(\varepsilon + b) \right)$$

$$N(\varepsilon_F) = N$$

per $N \gg 1$ avremo $\varepsilon_F \gg b$ e quindi

$$N(\varepsilon_F) \simeq \frac{m}{2\hbar^2 a} 2 \varepsilon_F^2 = N \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_F = \sqrt{\frac{N\hbar^2 a}{m}}$$

Più precisamente la condizione $N \gg 1$ risulta

$$\frac{N\hbar^2 a}{m} \gg b^2 \quad \text{cioè} \quad N \gg \frac{m b^2}{\hbar^2 a}$$