MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2021/2022 – Prof. C. Presilla

Prova Straordinaria – 4 maggio 2022

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 In un sistema che si trova nello stato descritto dal vettore $|A\rangle$ (non normalizzato) viene misurata l'osservabile rappresentata dall'operatore autoaggiunto ξ. Ripetendo tale operazione N volte si trova il risultato ξ_i un numero N_i di volte con $\sum_i N_i = N$. Dimostrare che

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_i N_i \xi_i = \frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle},$$

cioè che il valore medio dei risultati ottenuti nelle N misure coincide, nel limite $N \to \infty$, con il valore di aspettazione di ξ in $|A\rangle$.

[punteggio 4]

---

2 Si consideri l'equazione di Schrödinger stazionaria unidimensionale

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_E''(x) + V(x)\psi_E(x) + \lambda\delta(x)\psi_E(x) = E\psi_E(x),.$$

dove $\delta(x)$ è la distribuzione di Dirac in $x = 0$ e λ una costante reale. Stabilire le condizioni di raccordo di $\psi_E(x)$ in $x = 0$.

[punteggio 4]

---

3 Un sistema di N particelle aventi spin $\hbar/2$ è sottoposto a un campo magnetico esterno. Determinare il numero di microstati $\mathcal{N}$ del sistema in corrispondenza al macrostato caratterizzato dall'autovalore $\hbar M_z$ della terza componente dello spin totale. Calcolare, nel limite di N molto grande, il valore di M_z per cui $\mathcal{N}(M_z)$ risulta minimo.

[punteggio 4]

---

4 Una particella di massa m si nuove lungo l'asse x sotto l'influenza del potenziale $V(x)$. La particella si trova in un autostato dell'energia con autofunzione

$$\psi(x) = (\gamma^2/\pi)^{1/4} e^{-\gamma^2 x^2/2}$$

ed energia $E = \hbar^2\gamma^2/(2m)$. Determinare:
1) il valore del potenziale $V(x)$;
2) la posizione media della particella;
3) la quantità di moto media della particella.

[punteggio 7]

---

5 Si consideri un sistema composto da due particelle distinguibili di spin 1/2. Calcolare la probabilità che una misura dello spin totale $S^2 = |\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2|^2$ dia come risultato il valore $2\hbar^2$ nel caso in cui:
1) gli spin di entrambe le particelle puntano nella direzione $+z$;
2) lo spin della particella 1 punta nella direzione $+z$ e quello della particella 2 nella direzione $-z$;
3) lo spin della particella 1 punta nella direzione $+x$ e quello della particella 2 nella direzione $+z$.

[punteggio 7]

---

6 Un gas ideale costituito da N particelle identiche di massa m è vincolato nel piano xy con Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \sigma) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{a}{2}(q_x^2 + q_y^2) - b\sigma,$$

dove a, b sono costanti positive e σ è una variabile discreta che assume solo i valori ± 1. Nell'ipotesi di equilibrio termico a temperatura T e considerando le particelle come classiche, calcolare:
1) l'energia media E del gas;
2) il numero medio $N_-(R)$ di particelle del gas contenute all'interno del cerchio di raggio R centrato nell'origine e aventi $\sigma = 1$.
3) Nel caso in cui le N particelle siano fermioni di spin 1/2 e $-b\sigma$ rappresenti l'accoppiamento dello spin con un campo esterno, determinare, a temperatura $T = 0$, l'energia di Fermi ϵ_F. Si supponga, per semplicità, $N \gg 1$.

[punteggio 7]

$\lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}$ = probabilità di transizione dallo stato $|A\rangle$ allo stato $P_{\xi_i}|A\rangle$, essendo P_{ξ_i} il proiettore nel sottospazio relativo all'autovalore ξ_i di ξ (può essere degenere)

$$= \frac{|\langle A| P_{\xi_i} |A\rangle|^2}{\langle A|A\rangle \quad \langle A|P_{\xi_i} P_{\xi_i}|A\rangle}$$

$$= \frac{\langle A| P_{\xi_i} |A\rangle}{\langle A|A\rangle}$$

Pertanto

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_i \xi_i N_i = \sum_i \xi_i \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}$$

$$= \sum_i \xi_i \frac{\langle A| P_{\xi_i} |A\rangle}{\langle A| A\rangle}$$

$$= \frac{\langle A| \sum_i \xi_i P_{\xi_i} |A\rangle}{\langle A| A\rangle}$$

$$= \frac{\langle A| \xi |A\rangle}{\langle A|A\rangle}$$

Riscriviamo l'equazione come

$$\psi_E''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\psi_E(x)$$

e integriamola 2 volte tra $x_0 < 0$ e $x > 0$

$$\psi_E'(x) - \psi_E'(x_0) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{x_0}^{x} dy\,\left(V(y) - E\right)\psi_E(y)$$

$$\psi_E(x) - \psi_E(x_0) = \psi_E'(x_0)(x - x_0) + \frac{2m}{\hbar^2}\int_{x_0}^{x} dz \int_{x_0}^{z} dy\,\left(V(y) - E\right)\psi_E(y)$$

Se $V(x) = \lambda\,\delta(x)$ prendendo il limite $x_0 \to 0^-$ e $x \to 0^+$ otteniamo

$$\psi_E'(0^+) - \psi_E'(0^-) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\,\psi_E(0)$$

$$\psi_E'(0^+) - \psi_E(0^-) = 0$$

avendo assunto che ψ_E e ψ_E' siano limitate

Esercizio 3

Sia $N_\uparrow$ il numero di particelle con spin $\frac{1}{2}$ e $N_\downarrow$ il numero di quelle con spin $-\frac{1}{2}$. Risulta

$$N_\uparrow + N_\downarrow = N$$
$$M_z = (N_\uparrow - N_\downarrow)/2$$

e quindi $N_\uparrow = \frac{N}{2} + M_z \qquad N_\downarrow = \frac{N}{2} - M_z$

Il macrostato "M_z" è quindi il macrostato "$N_\uparrow, N_\downarrow$"

$$\mathcal{N}(M_z) = \mathcal{N}(N_\uparrow, N_\downarrow) = \frac{N!}{N_\uparrow!\, N_\downarrow!} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+M_z\right)!\left(\frac{N}{2}-M_z\right)!}$$

Per $N \gg 1$ possiamo applicare la formula di Stirling

$$N! \simeq \sqrt{2\pi}\, N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N} \qquad \text{cioè} \quad \ln N! \simeq N \ln N - N$$

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{N}(M_z) &= N \ln N - \cancel{N} \\ &\quad - \left(\frac{N}{2}+M_z\right) \ln\left(\frac{N}{2}+M_z\right) + \cancel{\left(\frac{N}{2}+M_z\right)} \\ &\quad - \left(\frac{N}{2}-M_z\right) \ln\left(\frac{N}{2}-M_z\right) + \cancel{\left(\frac{N}{2}-M_z\right)} \\ &= N \ln N - \left(\frac{N}{2}+M_z\right) \ln\left(\frac{N}{2}+M_z\right) \\ &\quad - \left(\frac{N}{2}-M_z\right) \ln\left(\frac{N}{2}-M_z\right)\end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{N}(M_z) \geq 1$ il massimo di $\mathcal{N}(M_z)$ coincide con il massimo di $\ln \mathcal{N}(M_z)$ e quindi il max si ha per

$$\frac{\partial}{\partial M_z} \ln(M_z) = -\ln\left(\frac{N}{2}+M_z\right) + \ln\left(\frac{N}{2}-M_z\right) = \ln\left(\frac{\frac{N}{2}-M_z}{\frac{N}{2}+M_z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{N}{2} - M_z = \frac{N}{2} + M_z \quad \Rightarrow \quad M_z = 0$$

Esercizio 4

$$\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)} \; x \; \psi(x) \, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}} \, e^{-\gamma^2 x^2} \, dx = 0$$

$$\langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) \, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -i\hbar \sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}} \, e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}} \left(-2x \frac{\gamma^2}{2} e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}}\right) dx$$
$$= 0$$

La funzione d'onda $\psi(x)$ soddisfa l'equazione

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

da cui risulta

$$E - V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) / \psi(x)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4} \left(-2x \frac{\gamma^2}{\cancel{2}} e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}}\right)\right) \frac{1}{\psi(x)}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4} \gamma^2 \left(\frac{d}{dx} \left(x \, e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}} \right) \right) \frac{1}{\psi(x)}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4} \gamma^2 \left(1 - x^2\gamma^2\right) e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}}}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m} \gamma^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \gamma^4 x^2$$

Poiché $E = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m}$ segue

$$V(x) = \frac{m}{2} \frac{\hbar^2 \gamma^4}{m^2} x^2$$

Si tratta di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega = \frac{\hbar \gamma^2}{m}$

Esercizio (5)

Esprimiamo gli autostati di $S_1^2\, S_2^2\, S^2\, S_z$ in termini di quelli $S_1^2 S_{1z}\, S_2^2 S_{2z}$

$$S^2 |S\, S_z\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S\, S_z\rangle$$
$$S_z |S\, S_z\rangle = \hbar S_z |S\, S_z\rangle$$

$$S_{1z} |S_{1z}\, S_{2z}\rangle = \hbar S_{1z} |S_{1z}\, S_{2z}\rangle$$
$$S_{2z} |S_{1z}\, S_{2z}\rangle = \hbar S_{2z} |S_{1z}\, S_{2z}\rangle$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z |-\rangle_z - |-\rangle_z |+\rangle_z\right)$$

$$|1,1\rangle = |+\rangle_z |+\rangle_z$$
$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z |-\rangle_z + |-\rangle_z |+\rangle_z\right)$$
$$|1,-1\rangle = |-\rangle_z |-\rangle_z$$

misurare per S^2 il valore $2\hbar^2$ significa avere $S=1$

2) $$|\psi\rangle = |+\rangle_z |-\rangle_z$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle + |1,0\rangle\right)$$

$$P(S=1) = \frac{1}{2} = \sum_{S_z=-1}^{1} \left|\langle 1, S_z | \psi\rangle\right|^2$$

1) $|\psi\rangle = |+\rangle_z |+\rangle_z$

$$= |1,1\rangle$$

$$P(S=1) = 1 = \sum_{S_z=-1,0,1} |\langle 1, S_z | \psi\rangle|^2$$

3) $|\psi\rangle = |+\rangle_x |+\rangle_z$

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z |+\rangle_z + |-\rangle_z |+\rangle_z\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0,0\rangle\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |1,1\rangle + \frac{1}{2} |1,0\rangle - \frac{1}{2} |0,0\rangle$$

$$P(S=1) = \sum_{S_z} |\langle 1, S_z | \psi\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Esercizio 6

$$Z_1 = \frac{1}{h^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_x \int_{-\infty}^{+\infty} dq_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \; e^{-\beta H(\underline{q}, \underline{p}, \sigma)}$$

$$= \frac{1}{h^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dq_x \, e^{-\beta \frac{a}{2} q_x^2} \right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \, e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \right)^2 \left(e^{-\beta b} + e^{+\beta b} \right)$$

$$= \frac{1}{h^2} \; \frac{2\pi}{\beta a} \; \frac{2\pi m}{\beta} \; 2 \cosh(\beta b)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{h} \right)^2 \frac{2m}{a \beta^2} \cosh(\beta b)$$

$$E = - N \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_1$$

$$= - N \left(- \frac{2}{\beta} + \frac{b \sinh(\beta b)}{\cosh(\beta b)} \right)$$

$$= N \left(2 k_B T - b \tanh(b / k_B T) \right)$$

$$N_+(R) = N \, P_+(R)$$

$P_+(R) =$ probabilità che una particella con $\sigma = 1$ si trovi nella regione $q_x^2 + q_y^2 \le R^2$

$$= \frac{\frac{1}{h^2} \sum_{\sigma} \int d\underline{q} \int d\underline{p} \; e^{-\beta H(\underline{q}, \underline{p}, \sigma)} \; \delta_{\sigma,1} \; \theta\left(R - \sqrt{q_x^2 + q_y^2}\right)}{Z_1}$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_y \; e^{-\beta \frac{a}{2}(q_x^2 + q_y^2)} \; \theta\left(R - \sqrt{q_x^2 + q_y^2}\right) e^{-\beta b}}{\frac{2\pi}{\beta a} \; 2 \cosh(\beta b)}$$

$$= \frac{\int_0^\infty 2\pi r\,dr\; e^{-\beta\frac{a}{2}r^2}\,\theta(R-r)\quad e^{-\beta b}}{\frac{2\pi}{a\beta}\left(e^{\beta b}+e^{-\beta b}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{\beta a}{2}}\,r = u$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}\int_0^{R\sqrt{\frac{\beta a}{2}}} e^{-u^2}\,u\,du\;\cancel{\frac{2}{\beta a}}}{\cancel{\frac{2\pi}{a\beta}}}\quad \frac{e^{-\beta b}}{e^{\beta b}+e^{-\beta b}}$$

$$= \left(1 - e^{-\beta\frac{a R^2}{2}}\right)\frac{1}{1+e^{2\beta b}}$$

Per $T=0$ il numero di stati di particella singola per fermioni di componente di spin + è

$$N_+(\varepsilon) = \frac{1}{h^2}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\;\theta\left(\varepsilon - H(\underline{q},\underline{p},1)\right)$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^{\sqrt{(\varepsilon-b)\frac{2}{a}}} 2\pi q_r\,dq_r\int_0^{\sqrt{(\varepsilon-b-\frac{a}{2}q_r^2)2m}} 2\pi p_r\,dp_r\quad\theta(\varepsilon-b)$$

dove $q_r = \sqrt{q_x^2+q_y^2}$ $\quad p_r=\sqrt{p_x^2+p_y^2}$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^{\sqrt{(\varepsilon-b)\frac{2}{a}}} 2\pi q_r\,dq_r\;\pi\left(\varepsilon-b-\frac{a}{2}q_r^2\right)2m\quad\theta(\varepsilon-b)$$

$$= \frac{1}{h^2}\,2\pi m\left((\varepsilon-b)(\varepsilon-b)\frac{2}{a}\pi - \frac{a}{2}\pi 2\,\frac{1}{4}(\varepsilon-b)^2\left(\frac{2}{a}\right)^2\right)\theta(\varepsilon-b)$$

$$= \frac{2\pi m}{h^2}\left(\frac{2\pi}{a}(\varepsilon-b)^2 - \frac{2}{a}\,\frac{\pi}{2}(\varepsilon-b)^2\right)\theta(\varepsilon-b)$$

$$= \frac{m}{2\hbar^2 a}(\varepsilon-b)^2\;\theta(\varepsilon-b)$$

Nel caso di fermioni con componente di spin $-$, il calcolo è identico basta sostituire $b \to -b$

$$N_-(\varepsilon) = \frac{m}{2\hbar^2 \alpha} (\varepsilon + b)^2 \, \theta(\varepsilon + b)$$

$$N(\varepsilon) = N_+(\varepsilon) + N_-(\varepsilon)$$

$$= \frac{m}{2\hbar^2 \alpha} \left((\varepsilon - b)^2 \cdot \theta(\varepsilon - b) + (\varepsilon + b)^2 \, \theta(\varepsilon + b) \right)$$

$$N(\varepsilon_F) = N$$

per $N \gg 1$ avremo $\varepsilon_F \gg b$ e quindi

$$N(\varepsilon_F) \simeq \frac{m}{2\hbar^2 \alpha} 2 \varepsilon_F^2 = N \implies \varepsilon_F = \sqrt{\frac{N\hbar^2 \alpha}{m}}$$

Più precisamente la condizione $N \gg 1$ risulta

$$\frac{N\hbar^2 \alpha}{m} \gg b^2 \quad \text{cioè} \quad N \gg \frac{m b^2}{\hbar^2 \alpha}$$