MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2020/2021 – Prof. C. Presilla

Prova A5 – 7 settembre 2021

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Una particella, libera di muoversi sull'intero asse reale, si trova nello stato $|\psi\rangle$ la cui rappresentazione di Schrödinger è

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \exp(-x^2/a^2).$$

Determinare la densità di probabilità della quantità di moto p della particella.

[punteggio 4]

2 Dimostrare che se due osservabili η e β commutano entrambe con l'osservabile ξ ma non commutano tra loro, in formule

$$[\eta, \xi] = [\beta, \xi] = 0, \qquad [\eta, \beta] \neq 0,$$

allora ξ è degenere (teorema di degenerazione).

[punteggio 4]

3 Un gas di fermioni non interagenti, non relativistici, in tre dimensioni, ha energia di Fermi ε_{F} (a temperatura $T = 0$). Determinare l'energia media per particella $\langle\varepsilon\rangle$ del gas.

[punteggio 4]

4 L'Hamiltoniana H di un sistema quantistico a due livelli è tale che

$$H|1\rangle = |1\rangle + e^{i\pi/4}|2\rangle, \qquad H|2\rangle = e^{-i\pi/4}|1\rangle,$$

dove $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono gli autostati normalizzati dell'operatore Hermitiano ξ

$$\xi|1\rangle = \sqrt{2}|1\rangle, \qquad \xi|2\rangle = -\sqrt{2}|2\rangle.$$

All'istante $t = 0$ si esegue una misura dell'osservabile associata all'operatore ξ e si trova il valore $-\sqrt{2}$.
1) Se immediatamente dopo si esegue una misura di energia, qual'è la probabilità di trovare il sistema nello stato fondamentale?
2) Quanto vale la stessa probabilità se la misura viene eseguita dopo un tempo t?
3) In quali istanti di tempo $t > 0$, se esistono, il sistema ritorna nello stesso stato in cui si trovava al tempo $t = 0$?

[punteggio 7]

5 Si consideri un sistema composto da due particelle distinguibili di spin 1/2. Calcolare la probabilità che una misura dello spin totale $S^2 = |\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2|^2$ dia come risultato il valore $2\hbar^2$ nel caso in cui:
1) gli spin di entrambe le particelle puntano nella direzione $+z$;
2) lo spin della particella 1 punta nella direzione $+z$ e quello della particella 2 nella direzione $-z$;
3) lo spin della particella 1 punta nella direzione $+x$ e quello della particella 2 nella direzione $+z$.

[punteggio 7]

6 Si consideri un sistema di N atomi uguali che hanno spin 1/2 e corrispondente momento di dipolo magnetico μ. Gli atomi sono vincolati ai vertici di un reticolo rigido e pertanto devono essere considerati distinguibili. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme di intensità B ed è all'equilibrio termico a temperatura T. Calcolare:
1) la funzione di partizione Z del sistema;
2) il momento magnetico totale M del sistema;
3) l'entropia S del sistema;
4) i valori limite dell'entropia per $T \to 0$ e $T \to \infty$.

[punteggio 7]

Esercizio 1

$$\psi(x) = A\, e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx \qquad u = \sqrt{2}\frac{x}{a}$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \frac{a}{\sqrt{2}} = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a$$

$$|A| = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a}}$$

Quindi $\psi(x) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{x^2}{a^2}\right)$ è normalizzata

Nella rappresentazione della quantità di moto lo stato $|\psi\rangle$ è dato da

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{px}{\hbar}} \psi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - i\frac{px}{\hbar}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a}\frac{ipa}{2\hbar} + \frac{p^2a^2}{4\hbar^2}\right) dx\, e^{-\frac{p^2a^2}{4\hbar^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{p^2a^2}{4\hbar^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{a} - \frac{ipa}{2\hbar}\right)^2\right] dx$$

$$u = \frac{x}{a} - i\frac{pa}{2\hbar}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{p^2a^2}{4\hbar^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\, a$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} a\, e^{-\frac{p^2a^2}{4\hbar^2}}$$

La densità di probabilità di p vale

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, e^{-\frac{p^2a^2}{2\hbar^2}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi\hbar^2}} e^{-\frac{p^2a^2}{2\hbar^2}}$$

normalizzata a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}(p)\right|^2 dp = \frac{a}{\sqrt{2\pi\hbar^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2 a^2}{2\hbar^2}} dp \qquad u = \frac{pa}{\sqrt{2}\hbar}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi\hbar^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \, \frac{\sqrt{2}\hbar}{a}$$

$$= \cancel{\frac{a}{\sqrt{2\pi}\,\hbar}} \sqrt{\pi} \, \frac{\sqrt{2}\cancel{\hbar}}{\cancel{a}} = 1$$

Esercizio 2

Dimostriamolo per assurdo. Se ξ fosse non degenere, ogni suo autovettore sarebbe anche autovettore di η e β che commutano con ξ. Seguirebbe che η e β hanno un sistema completo di autovettori in comune e di conseguenza commuterebbero, in contraddizione con l'ipotesi

Esercizio 3

Per un gas di fermioni non interagenti non relativistici 3D con spin g la densità degli stati è proporzionale a $\sqrt{\varepsilon}$. Infatti

$$N(\varepsilon) = \frac{2g+1}{h} \int_V dq \int_0^{\sqrt{2m\varepsilon}} dp \, 4\pi p^2$$

$$= \frac{2g+1}{h} V \frac{4}{3}\pi (2m\varepsilon)^{3/2}$$

$$\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{2g+1}{h} V \frac{4}{3}\pi (2m)^{3/2} \frac{3}{2} \varepsilon^{1/2} \propto \sqrt{\varepsilon}$$

L'energia media per particella è quindi

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon}\, \varepsilon \, d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon} = \frac{\frac{2}{5} \varepsilon^{5/2} \Big|_0^{\varepsilon_F}}{\frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \Big|_0^{\varepsilon_F}} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$$

Esercizio 4

Nella base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ H ha elementi di matrice

$\langle 1|H|1\rangle = 1 \qquad \langle 1|H|2\rangle = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\langle 2|H|1\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \langle 2|H|2\rangle = 0$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono dati da $\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$(1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0 \qquad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Posto $H|\pm\rangle = E_\pm |\pm\rangle$ si ha $E_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$H|\pm\rangle = \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\pm + e^{-i\frac{\pi}{4}} b_\pm \\ e^{i\frac{\pi}{4}} a_\pm \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix}$$

$$e^{+i\frac{\pi}{4}} a_\pm = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) b_\pm$$

$$a_\pm = b_\pm \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$|\pm\rangle = b_\pm \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

la costante $b_\pm$ è fissata dalla normalizzazione

$$1 = \langle \pm | \pm \rangle = |b_\pm|^2 \left(\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}, 1 \right) \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= |b_\pm|^2 \left(\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 \right)$$

$$= |b_\pm|^2 \left(\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} + 1 \right)$$

$$= |b_\pm|^2 \left(\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = |b_\pm|^2 \, \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\sqrt{5} \pm 1 \right)$$

$$|b_\pm|^2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5} \pm 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5} \mp 1}{(\sqrt{5} \pm 1)(\sqrt{5} \mp 1)} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5} \mp 1}{5 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \mp 1}{2\sqrt{5}}$$

In conclusione, a meno di un fattore di fase,

$$|\pm\rangle = \left(\frac{\sqrt{5} \mp 1}{2\sqrt{5}} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è

$$|\psi(0)\rangle = |2\rangle$$

la probabilità di ottenere il risultato E_- in una misura di H al tempo $t = 0$ è quindi

$$p_-(t=0) = |\langle \psi(0) | - \rangle|^2 =$$

$$= \left| (0, 1) \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}$$

Al tempo t il sistema si trova nello stato

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}|-\rangle\langle-|\psi(0)\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}|+\rangle\langle+|\psi(0)\rangle$$

La probabilità di misurare E_- risulta ancora

$$p_-(t) = \left|\langle-|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\langle-|\psi(0)\rangle\right|^2 = p_-(0)$$

in accordo con il fatto che H è una costante del moto.

Osservando che

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}\left(|-\rangle\langle-|2\rangle + e^{-i\omega t}|+\rangle\langle+|2\rangle\right)$$

dove $\omega = \frac{E_+ - E_-}{\hbar} = \frac{\sqrt{5}}{\hbar}$

deduciamo che quando $e^{-i\omega t} = 1$ si ha

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}\left(|-\rangle\langle-|2\rangle + |+\rangle\langle+|2\rangle\right)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}\left(|-\rangle\langle-| + |+\rangle\langle+|\right)|2\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}|2\rangle$$

coincidente con $|2\rangle = |\psi(0)\rangle$ a meno di un irrilevante fattore di fase. I tempi in cui questo succede sono quindi quelli tali che

$$-i\omega t = i2\pi n \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega}k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Esercizio 5

Esprimiamo gli autostati di $S_1^2 \; S_2^2 \; S^2 \; S_z$ in termini di quelli $S_1^2 \; S_{1z} \; S_2^2 \; S_{2z}$

$$S^2 |S \, S_z\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S \, S_z\rangle$$

$$S_z |S \, S_z\rangle = \hbar S_z |S \, S_z\rangle$$

$$S_{1z} |S_{1z} \, S_{2z}\rangle = \hbar S_{1z} |S_{1z} \, S_{2z}\rangle$$

$$S_{2z} |S_{1z} \, S_{2z}\rangle = \hbar S_{2z} |S_{1z} \, S_{2z}\rangle$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z |-\rangle_z - |-\rangle_z |+\rangle_z \right)$$

$$|1,1\rangle = |+\rangle_z |+\rangle_z$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z |-\rangle_z + |-\rangle_z |+\rangle_z \right)$$

$$|1,-1\rangle = |-\rangle_z |-\rangle_z$$

misurare per S^2 il valore $2\hbar^2$ significa avere $S=1$

2) $$|\psi\rangle = |+\rangle_z |-\rangle_z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0,0\rangle + |1,0\rangle \right)$$

$$P(S=1) = \frac{1}{2} = \sum_{S_z=-1}^{1} \left| \langle 1, S_z | \psi \rangle \right|^2$$

1) $|\psi\rangle = |+\rangle_z |+\rangle_z$

$= |1,1\rangle$

$P(s=1) = 1 = \sum_{s_z=-1,0,1} \left|\langle 1, s_z | \psi\rangle\right|^2$

3) $|\psi\rangle = |+\rangle_x |+\rangle_z$

$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right)$

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z |+\rangle_z + |-\rangle_z |+\rangle_z\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle\right)\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} |1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|0,0\rangle$

$P(s=1) = \sum_{s_z} \left|\langle 1, s_z | \psi\rangle\right|^2$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$

$$Z = Z_1^N$$

$$Z_1 = e^{-\beta(-\mu B)} + e^{-\beta(\mu B)} \quad (*)$$

$$= e^{\beta\mu B} + e^{-\beta\mu B}$$

$N_\pm$ = numero medio di atomi con momento magnetico $\pm\mu$ i.e. con energia $\mp \mu B$

$$= \frac{N}{Z_1} e^{+\beta(\pm\mu B)}$$

$$M = \mu(N_+ - N_-) = \mu \frac{N}{Z_1}\left(e^{+\beta\mu B} - e^{-\beta\mu B}\right)$$

$$= \mu N \tanh(\beta\mu B) = \mu N \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)$$

(*) energia di un atomo $= -\underline{\mu}\cdot\underline{B} = -(\pm\mu B) = \mp \mu B$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$F = -k_B T \log Z = -k_B T N \log Z_1$$

$$S = -\frac{\partial}{\partial T}\left(-N k_B T \log\left(e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}\right)\right)$$

$$= N k_B \log\left(e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}\right)$$

$$+ N k_B T \frac{e^{\frac{\mu B}{k_B T}}\left(-\frac{\mu B}{k_B T^2}\right) - e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}\left(-\frac{\mu B}{k_B T^2}\right)}{e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}}$$

$$= N k_B \left[\log 2 + \log\left(\cosh\left(e^{\frac{\mu B}{k_B T}}\right)\right) - \frac{\mu B}{k_B T}\tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)\right]$$

per $T \to 0$

$$S \simeq N k_B \left[\log 2 + \log\left(\frac{e^{\frac{\mu B}{k_B T}}}{2} \right) - \frac{\mu B}{k_B T} 1 + O\left(\frac{k_B T}{\mu B}\right) \right]$$

e quindi

$$\lim_{T \to 0} S(T) = N k_B \left[\cancel{\log 2} + \cancel{\frac{\mu B}{k_B T}} - \cancel{\log 2} - \cancel{\frac{\mu B}{k_B T}} \right] = 0$$

per $T \to \infty$

$$S \simeq N k_B \left[\log 2 + \log 1 - \frac{\mu B}{k_B T} 1 \right]$$

e quindi

$$\lim_{T \to \infty} S(T) = N k_B \log 2 = k_B \log 2^N$$

$$= k_B \log(\#\ \text{microstati})$$