MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2021/2022 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 9 febbraio 2022

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Si consideri una particella di massa m vincolata in una dimensione con Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\hbar^2}{m\cosh^2 x}.$$

Mostrare che la funzione $\psi(x) = (C + \tanh x)\exp(\mathrm{i}kx)$ è soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria per un opportuno valore della costante C. Determinare tale valore di C e il corrispondente autovalore dell'energia. Calcolare infine i coefficienti di riflessione e trasmissione di $\psi(x)$.

[punteggio 4]

2 Un corpo rigido avente momento d'inerzia I_z per rotazioni intorno all'asse z ruota liberamente intorno a questo asse, fisso nello spazio. Sia φ l'angolo di rotazione. Determinare gli autovalori dell'energia, specificandone la degenerazione, e le corrispondenti autofunzioni.

[punteggio 4]

3 Si consideri un sistema di elettroni non interagenti all'equilibrio grancanonico con un reservoir a temperatura T e potenziale chimico μ. Determinare la probabilità di trovare un elettrone ad energia $\mu + \Delta$. Dimostrare che tale probabilità coincide con la probabilità di non trovare un elettrone a energia $\mu - \Delta$.

[punteggio 4]

4 Per una particella di massa m vincolata lungo una retta e soggetta al potenziale $V(x) = bx^4$ possiamo supporre che lo stato fondamentale sia ben approssimato dalla funzione d'onda

$$\psi(x;\lambda) = Ce^{-\lambda^2 x^2},$$

con λ parametro variazionale reale. Determinare:
1) l'energia media della particella nello stato $\psi(x;\lambda)$;
2) la migliore stima possibile all'energia E_0 dello stato fondamentale al variare di λ;
3) l'ampiezza Δ dell'intervallo all'interno del quale la densità di probabilità dello stato fondamentale trovato al punto 2) risulta maggiore di $1/e$ volte il suo valore massimo.

Possono essere utili i seguenti integrali ($a > 0$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}.$$

[punteggio 7]

5 Due particelle di massa m intrappolate all'interno del potenziale armonico tridimensionale

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2, \qquad \boldsymbol{r} = (x,y,z), \qquad \omega_x > \omega_y > \omega_z,$$

si trovano nello stato di minima energia. Usando la teoria delle perturbazioni, calcolare la variazione di energia dello stato fondamentale indotta, all'ordine 1 in λ, dal potenziale di interazione tra le particelle $V_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \lambda\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ nei seguenti tre casi:
1) le particelle sono distinguibili;
2) le particelle sono identiche e di spin 0;
3) le particelle sono identiche e di spin 1/2 con gli spin paralleli.

[punteggio 7]

6 Un gas di N particelle identiche non interagenti di massa m è contenuto all'interno di un cilindro di altezza L e raggio $2R$. Le particelle sono in equilibrio termico con un termostato a temperatura T e l'Hamiltoniana di singola particella è

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(r), \qquad \boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{q} = (x,y,z), \quad 0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2R, \quad 0 \le z \le L,$$

dove $V(r)$ con $r \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ è il potenziale radiale

$$V(r) = \begin{cases} V_0 r^2/R^2, & 0 \le r \le R, \\ V_0, & R < r \le 2R. \end{cases}$$

Supponendo che le particelle possano essere descritte come particelle classiche, calcolare:
1) l'energia media E del sistema;
2) la pressione locale $P(r)$ a distanza r dall'asse del cilindro;
3) la pressione media $\langle P\rangle$ all'interno del cilindro;
Si consideri poi il caso in cui la temperatura di equilibrio sia approssimabile con $T = 0$ e le particelle siano fermioni di spin 3/2. Calcolare:
4) la densità degli stati di singola particella $G(\epsilon)$.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Abbiamo

$$\psi(x) = \left(C + \tanh x\right) e^{ikx}$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} e^{ikx} + \left(C + \tanh x\right) e^{ikx}\, ik$$

$$= \left[(\cosh x)^{-2} + ik\left(C + \tanh x\right)\right] e^{ikx}$$

$$\psi''(x) = \left[-2\left(\cosh(x)\right)^{-3} \sinh(x) + ik\left(\cosh(x)\right)^{-2}\right] e^{ikx}$$

$$+ ik e^{ikx}\left[\left(\cosh(x)\right)^{-2} + ik\left(C + \tanh(x)\right)\right]$$

$$= \left[-2\frac{\sinh(x)}{\left(\cosh(x)\right)^3} + \frac{2ik}{\left(\cosh(x)\right)^2} - k^2\left(C + \tanh(x)\right)\right] e^{ikx}$$

Pertanto

$$H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\cancel{-2\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)^3}} + \frac{2ik}{\left(\cosh(x)\right)^2} - k^2\left(C + \tanh(x)\right)\right] e^{ikx}$$

$$-\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{\left(\cosh(x)\right)^2}\left(C + \cancel{\tanh(x)}\right) e^{ikx}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{1}{\left(\cosh(x)\right)^2}\left(C + ik\right) e^{ikx}\right]$$

$$+ \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \left(C + \tanh(x)\right) e^{ikx}$$

Se $C = -ik$ abbiamo $H\psi(x) = E\,\psi(x)$

con $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Per calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione la cosa più semplice è stabilire il comportamento asintotico di $\psi(x)$. Usando $\lim_{x \to \pm\infty} \tanh(x) = \pm 1$

abbiamo

$$\psi(x) \sim (1 - ik)\, e^{ikx} \qquad x \to +\infty$$

$$\psi(x) \sim (-1 - ik)\, e^{ikx} \qquad x \to -\infty$$

Non vi è quindi componente riflesso e^{-ikx} e si ha $R = 0$ $\quad T = 1$

Esercizio ②

L'Hamiltoniana del rotatore libero è

$$H = -\frac{\hbar^2}{2I_z}\frac{d^2}{d\varphi^2}$$ (asse di rotazione fisso nello spazio)

e quindi l'equazione agli autovalori di H si scrive

$$-\frac{\hbar^2}{2I_z}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = E\,\psi(\varphi)$$

ovvero $\psi''(\varphi) = -\omega^2\psi(\varphi)$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{2I_zE}{\hbar^2}} > 0$

la cui soluzione è $\psi(\varphi) = A\,e^{\pm i\omega\varphi}$

Affinché risulti $\psi(\varphi) = \psi(\varphi+2\pi)$ deve valere la condizione di quantizzazione

$$e^{\pm i\omega 2\pi} = 1$$

e quindi $\omega = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Gli autovalori sono quindi $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2I_z}$ $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$

questi autovalori sono doppiamente degeneri con autofunzioni

$$\psi_{\pm k}(\varphi) = A\,e^{\pm ik\varphi}$$

La costante A può essere fissata per normalizzazione

$$1 = \int_0^{2\pi}\psi_\pm(\varphi)\,d\varphi = |A|^2\,2\pi \qquad \text{e.g.} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Lo stato $k=0$ è non degenere.

Se a $t=0$ si ha $\psi(\varphi,0) = C\sin^2\varphi$ abbiamo

$$\psi(\varphi,0) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\Phi_k(\varphi)\int_0^{2\pi}\overline{\Phi_k(\varphi)}\,\psi(\varphi,0)\,d\varphi\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{-k}(\varphi)\int_0^{2\pi}\overline{\Phi_{-k}(\varphi)}\,\psi(\varphi,0)\,d\varphi\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\varphi}\int_0^{2\pi}\frac{C}{-4}\left(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}-2\right)\frac{e^{-ik\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,d\varphi\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\varphi}\int_0^{2\pi}\frac{C}{-4}\left(e^{i\varphi 2}+e^{-2i\varphi}-2\right)\frac{e^{ik\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,d\varphi\right]\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\varphi}\left(-\frac{C}{4}\right)\left(\delta_{k,2}-2\,\delta_{k0}\right)\sqrt{2\pi}\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\varphi}\left(-\frac{C}{4}\right)\left(\delta_{k,2}-2\,\delta_{k,0}\right)\sqrt{2\pi}\right]$$

$$=\frac{C}{2}-\frac{C}{4}e^{i2\varphi}-C\,e^{-i2\varphi}$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}C\,\psi_0(\varphi)-\frac{\sqrt{2\pi}}{4}C\,\psi_2(\varphi)-\frac{\sqrt{2\pi}}{4}C\,\psi_{-2}(\varphi)$$

$$\psi(\varphi,t)=e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,\psi(\varphi,0)$$

$$=\sqrt{2\pi}\,C\left(\frac{1}{2}\psi_0-\frac{1}{4}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 4}{2I_z}t}\psi_2-\frac{1}{4}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 4}{2I_z}t}\psi_{-2}\right)$$

$$=C\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2\varphi-\frac{2\hbar t}{I_z}\right)\right)$$

$$=\frac{C}{2}\left[1-\cos\left(2\left(\varphi-\frac{\hbar t}{I_z}\right)\right)\right]$$

$$=C\sin^2\left(\varphi-\frac{\hbar t}{I_z}\right)$$

Esercizio 3

La distribuzione di Fermi

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)\beta} + 1} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

fornisce la probabilità di occupazione del livello di singola particella ε. Pertanto la probabilità di trovare un elettrone a energia $\varepsilon = \mu + \Delta$ è

$$n(\varepsilon + \Delta) = \frac{1}{e^{\beta\Delta} + 1}$$

La probabilità di non trovare un elettrone a energia $\varepsilon = \mu - \Delta$ vale

$$1 - n(\varepsilon - \Delta) = 1 - \frac{1}{e^{-\beta\Delta} + 1}$$

$$= \frac{e^{-\beta\Delta} + 1 - 1}{e^{-\beta\Delta} + 1} = \frac{e^{-\beta\Delta}}{e^{-\beta\Delta} + 1}$$

$$= \frac{1}{1 + e^{\beta\Delta}} = n(\varepsilon + \Delta)$$

Esercizio 4

Stimiamo l'energia dello stato fondamentale di

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + b x^4$$

mediante la formula

$$E_0 = \inf_{|\psi\rangle} \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

Assumendo $\psi(x;\lambda) = C e^{-\lambda^2 x^2}$ abbiamo

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |C|^2 e^{-2\lambda^2 x^2} dx = |C|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda^2}}$$

$$\psi'(x;\lambda) = C e^{-\lambda^2 x^2}\left(-2\lambda^2 x\right)$$

$$\psi''(x;\lambda) = C e^{-\lambda^2 x^2}\left(-2\lambda^2 x\right)^2 - 2\lambda^2 C e^{-\lambda^2 x^2}$$

$$= C e^{-\lambda^2 x^2}\left(-2\lambda^2 + 4\lambda^4 x^2\right)$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x;\lambda)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + b x^4\right)\psi(x;\lambda)\, dx$$

$$= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\left(2\lambda^2 - 4\lambda^4 x^2\right) + b x^4\right) e^{-2\lambda^2 x^2} dx$$

$$= |C|^2\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(2\lambda^2\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda^2}} - 4\lambda^4\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{8\lambda^6}}\right) + b\,\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{32\lambda^{10}}}\right]$$

$$E_0 = \frac{\langle\psi(\lambda)|H|\psi(\lambda)\rangle}{\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(2\lambda^2 - 4\lambda^4\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\lambda^4}}\right) + b\,\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{16\lambda^8}}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(2\lambda^2 - \lambda^2\right) + \frac{3}{16}\frac{b}{\lambda^4}$$

$E_0(\lambda)$ presenta un massimo per $\lambda = \lambda_0$ determinato da

$$\frac{d}{d\lambda} E_0(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda} E_0(\lambda) = \frac{\hbar^2}{2m} 2\lambda + \frac{3}{16} b \left(-\frac{4}{\lambda^5}\right)$$

$$2\lambda^6 = \frac{3}{4} \frac{2mb}{\hbar^2}$$ che ha soluzione

$$\lambda_0 = \left(\frac{3}{8} \frac{2mb}{\hbar^2}\right)^{1/6}$$

$$E_0(\lambda_0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{8} \frac{2mb}{\hbar^2}\right)^{1/3} + \frac{3}{16} b \left(\frac{8}{3} \frac{\hbar^2}{2mb}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{3}{8} \frac{2mb}{\hbar^2}\right)^{1/3} + \frac{3}{16} b^{1/3} \frac{4}{3^{2/3}} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/3} \right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{3^{1/3}}{2} \left(\frac{2mb}{\hbar^2}\right)^{1/3} + \frac{3^{1/3}}{4} \left(\frac{2mb}{\hbar^2}\right)^{1/3} \right]$$

$$= \frac{3\, 3^{1/3}}{4} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2mb}{\hbar^2}\right)^{1/3}$$

La corrispondente funzione d'onda è $\psi(x;\lambda_0)$
e la densità di probabilità vale $\rho(x;\lambda_0) = |c|^2 e^{-2\lambda_0^2 x^2}$

$$\rho(x;\lambda_0) \geq |c|^2 e^{-1} \quad \text{per} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}\lambda_0} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_0}$$

Dunque $\Delta = \frac{2}{\sqrt{2}\lambda_0} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{3^{1/6}} \left(\frac{\hbar^2}{2mb}\right)^{1/6} = \frac{2}{3^{1/6}} \left(\frac{\hbar^2}{2mb}\right)^{1/6}$

Esercizio 5

L'Hamiltoniano del sistema imperturbato è

$$H = H_1 + H_2 \qquad H_i = \frac{\underline{p}_i^2}{2m} + V(\underline{r}_i) \qquad [H_1, H_2] = 0$$

Se le particelle sono distinguibili gli autovalori di H sono

$$E_{n_{1x} n_{1y} n_{1z} n_{2x} n_{2y} n_{2z}} = \hbar\omega_x (n_{1x} + n_{2x} + 1) + \hbar\omega_y (n_{1y} + n_{2y} + 1) + \hbar\omega_z (n_{1z} + n_{2z} + 1)$$

con autofunzioni

$$\psi_{n_{1x} n_{1y} n_{1z} n_{2x} n_{2y} n_{2z}}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \varphi_{n_{1x} n_{1y} n_{1z}}(\underline{r}_1)\, \varphi_{n_{2x} n_{2y} n_{2z}}(\underline{r}_2)$$

$$\varphi_{n_{ix} n_{iy} n_{iz}}(\underline{r}_i) = \chi_{n_{ix}}(x_i;\omega_x)\chi_{n_{iy}}(y_i;\omega_y)\chi_{n_{iz}}(z_i;\omega_z) \quad i = 1,2$$

dove $\chi_n(q;\omega)$ è l'autofunzione n-esima dell'oscillatore armonico unidimensionale con pulsazione ω.
Gli indici $n_{1x} \cdots n_{2z}$ sono gli interi $0, 1, 2, \ldots$

Lo stato fondamentale ha energia

$$E_0 = \hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$$

ed è ottenuto per $n_{1x} = n_{2x} = n_{1y} = n_{2y} = n_{1z} = n_{2z} = 0$
Tale livello è non degenere e la perturbazione V_{int} ne causa all'ordine λ lo spostamento

$$\Delta E = \int d\underline{r}_1 \int d\underline{r}_2 \; \overline{\psi_0(\underline{r}_1,\underline{r}_2)} \; V_{int}(\underline{r}_1,\underline{r}_2) \, \psi_0(\underline{r}_1,\underline{r}_2)$$

$$= \lambda \int d\underline{r}_1 \left| \psi_0 \; (\underline{r}_1, \underline{r}_1) \right|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; X_0(x_1;\omega_x)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \; X_0(y_1;\omega_y)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \; X_0(z_1;\omega_z)^4$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \sqrt{\omega_x \omega_y \omega_z}$$

avendo usato $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dq \; X_0(q;\omega)^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \left(\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} q^2} \right)^4$

$$= \frac{m\omega}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \; e^{-\frac{2m\omega}{\hbar} q^2} = \frac{m\omega}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2m\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}}$$

Se le particelle sono bosoni indistinguibili di spin 0, le autofunzioni di H devono essere stati prodotto simmetrizzati. L'autofunzione $\psi_{000\,000}(\underline{r}_1,\underline{r}_2)$ dello stato fondamentale già risulta simmetrica per lo scambio delle due particelle pertanto nulla cambia rispetto al caso precedente.

Se le particelle sono fermioni identici di spin 1/2 le autofunzioni ammissibili devono essere stati prodotto antisimmetrici per scambio ~~1↔2~~. Lo stato fondamentale ha quindi energia (si ricordi che $\omega_x > \omega_y > \omega_z$)

$$E_0 = \hbar(\omega_x + \omega_y + 2\omega_z)$$

corrispondente alla funzione d'onda antisimmetrizzata

$$\psi_0^{(A)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{000}(\underline{r}_1)\, \varphi_{001}(\underline{r}_2) - \varphi_{001}(\underline{r}_1)\, \varphi_{000}(\underline{r}_2) \right)$$

Osservando che $\psi^{(A)}(\underline{r}_1, \underline{r}_1) = 0$ si ottiene la correzione perturbativa $\Delta E = 0$

Esercizio 6

La funzione di partizione di singola particella vale

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int_V d\underline{q} \int d\underline{p}\; e^{-\beta H(\underline{q},\underline{p})}$$

$$= \frac{1}{h^3} L\left(\int_0^R 2\pi r\, dr\, e^{-\beta V_0 \frac{r^2}{R^2}} + \int_R^{2R} 2\pi r\, dr\, e^{-\beta V_0}\right)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\; e^{-\beta p_x^2/2m}\right)^3$$

$$= \frac{1}{h^3} L \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\left[2\pi\left(-\frac{R^2}{2\beta V_0}\right) e^{-\beta V_0 \frac{r^2}{R^2}}\Big|_0^R + e^{-\beta V_0}\left(\pi(2R)^2 - \pi R^2\right)\right]$$

$$= \frac{L}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\left(\frac{\pi R^2}{\beta V_0} - \frac{\pi R^2}{\beta V_0} e^{-\beta V_0} + e^{-\beta V_0}\, 3\pi R^2\right)$$

$$= \frac{\pi R^2 L}{h} \frac{(2\pi m)^{3/2}}{V_0 \beta^{5/2}}\left(1 - e^{-\beta V_0} + 3\beta V_0 e^{-\beta V_0}\right)$$

L'energia media per particella è quindi

$$\frac{E}{N} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= \frac{5}{2}\frac{1}{\beta} - \frac{V_0 e^{-\beta V_0} - 3\beta V_0^2 e^{-\beta V_0} + 3 V_0 e^{-\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + 3\beta V_0 e^{-\beta V_0}}$$

$$= \frac{5}{2}\frac{1}{\beta} - V_0\, \frac{(4 - 3\beta V_0)\, e^{-\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + 3\beta V_0 e^{-\beta V_0}}$$

L'equazione di stato applicata al volume $L\,2\pi r\,dr$ è

$$P(r)\; L\,2\pi r\,dr = dN(r)\; k_B T$$

dove $dN(r)$ è il numero medio di particelle in tale volume

$$dN(r) = N \frac{e^{-\beta V(r)}\; L\,2\pi r\,dr}{L \int_0^{2R} e^{-\beta V(r)}\, 2\pi r\,dr}$$

$$= N\; L\,2\pi r\,dr \; \frac{e^{-\beta V(r)}}{L \frac{\pi R^2}{\beta V_0}\left(1 - e^{-\beta V_0} + 3\beta V_0\, e^{-\beta V_0}\right)}$$

Pertanto la pressione locale a distanza dall'asse del cilindro è

$$P(r) = \frac{N k_B T}{L \pi R^2}\; \frac{\beta V_0\, e^{-\beta V(r)}}{1 - e^{-\beta V_0} + 3\beta V_0\, e^{-\beta V_0}}$$

Osservando che

$$\langle e^{-\beta V} \rangle = \frac{1}{L\,4\pi R^2} \int_0^{2R} L\,2\pi r\,dr\; e^{-\beta V(r)}$$

$$= \frac{1}{L\,4\pi R^2}\; \frac{L\,\pi R^2}{\beta V_0}\left(1 - e^{-\beta V_0} + 3\beta V_0\, e^{-\beta V_0}\right)$$

otteniamo per la pressione media

$$\langle P \rangle = \frac{N k_B T}{V}$$

dove $V = L\,4\pi R^2$ è il volume del cilindro.
Lo stesso risultato lo si ottiene dalla formula

$$\langle P \rangle = k_B T \frac{\partial}{\partial V} \log Z = N k_B T \frac{\partial}{\partial V} \log Z_1$$

La densità degli stati di singola particella è data da

$$G(\varepsilon) = \frac{4}{h^3} \int_V d\underline{q} \int d\underline{p} \;\; \delta\left(\varepsilon - H(\underline{q},\underline{p})\right)$$

$$= \frac{4L}{h^3} \int_0^{2R} 2\pi r\, dr \int_0^{\infty} 4\pi p^2 dp \;\; \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - V(r)\right)$$

Posto $f(p) = \varepsilon - \frac{p^2}{2m} - V(r)$ valutiamo $\delta\left(f(p)\right)$

$f(p) = 0$ per $p = \pm p_0$ dove $p_0 = \sqrt{2m\left(\varepsilon - V(r)\right)} > 0$

inoltre $f'(\pm p_0) = \pm \frac{p_0}{m}$ quindi

$$\delta\left(f(p)\right) = \frac{1}{|f'(p_0)|} \, \delta(p - p_0) + \frac{1}{|f'(-p_0)|} \, \delta(p + p_0)$$

$$= \frac{m}{p_0} \left(\delta(p - p_0) + \delta(p + p_0) \right)$$

$$\int_0^{\infty} 4\pi p^2 dp \;\; \delta\left(f(p)\right) = 4\pi m \, p_0 \;\; \theta\left(\varepsilon - V(r)\right) \theta(\varepsilon)$$

la funzione $\theta\left(\varepsilon - V(r)\right) \theta(\varepsilon)$ assicura che p_0 sia reale altrimenti l'integrale è nullo.

$$G(\varepsilon) = \frac{4L}{h^3} \, 4\pi m \int_0^{2R} 2\pi r\, dr \;\; \theta\left(\varepsilon - V(r)\right) \sqrt{2m\left(\varepsilon - V(r)\right)}$$

Se $\varepsilon < V_0$ detto r_0 il raggio tale che $V(r_0) = \varepsilon$ cioè $r_0 = R\sqrt{\varepsilon / V_0}$ si ha

$$G(\varepsilon) = \frac{4L}{h^3} \, 4\pi m \int_0^{r_0} 2\pi r\, dr \sqrt{2m\left(\varepsilon - \frac{V_0}{R^2} r^2\right)} \;\; \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{4L}{h^3} \, 4\pi m \cdot 2\pi \left(-\frac{R^2}{3V_0}\right) \left(2m\left(\varepsilon - \frac{V_0}{R^2} r^2\right)\right)^{3/2} \Bigg|_0^{r_0} \;\; \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{4L}{h^3} \; 8\pi^2 m \; \frac{R^2}{3V_0} \left(2m\varepsilon\right)^{3/2} \quad \theta(\varepsilon)$$

Se invece $\varepsilon > V_0$ vale

$$G(\varepsilon) = \frac{4L}{h^3} \; 4\pi m \left(\int_0^R 2\pi r \, dr \sqrt{2m(\varepsilon - V(r))} + \int_R^{2R} 2\pi r \, dr \sqrt{2m(\varepsilon - V_0)} \right)$$

$$= \frac{4L}{h^3} \; 8\pi^2 m \left(\frac{R^2}{3V_0} (2mV_0)^{3/2} + \frac{3}{2} R^2 \left(2m(\varepsilon - V_0)\right)^{1/2} \right)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{32 L \pi^2 m R^2}{3h^3 V_0} \begin{cases} (2m\varepsilon)^{3/2} & 0 \leq \varepsilon \leq V_0 \\ (2mV_0)^{3/2} + \frac{9}{2} V_0 \left(2m(\varepsilon - V_0)\right)^{1/2} & \varepsilon > V_0 \end{cases}$$